目次

第 1 章　展開と因数分解

第 1 講　式の展開 …… 6 – 9
第 2 講　乗法公式 …… 10 – 13
第 3 講　乗法公式の利用 …… 14 – 16
第 4 講　因数分解 …… 17 – 21
第 5 講　いろいろな因数分解 …… 22 – 24
第 6 講　式の計算の利用 …… 25 – 27
第 7 講　式の計算による証明 …… 28 – 31

第 2 章　平方根

第 8 講　平方根 …… 32 – 36
第 9 講　平方根の大小 …… 37 – 39
第 10 講　近似値・有効数字 …… 40 – 42
第 11 講　有理数・無理数 …… 43 – 47
第 12 講　$\sqrt{}$ のついた数の積・商 …… 48 – 50
第 13 講　根号をふくむ式の乗法・除法 …… 51 – 57
第 14 講　根号をふくむ式の加法・減法 …… 58 – 62
第 15 講　根号をふくむ式の計算 …… 63 – 67

第 3 章　2 次方程式

第 16 講　2 次方程式 …… 68 – 69
第 17 講　2 次方程式の解き方 …… 70 – 77
第 18 講　解が与えられた 2 次方程式 …… 78 – 79
第 19 講　2 次方程式の利用 …… 80 – 85

第 4 章　関数 $y = ax^2$

第 20 講　関数 $y = ax^2$ …… 86 – 89
第 21 講　関数 $y = ax^2$ のグラフ …… 90 – 95
第 22 講　関数 $y = ax^2$ の値の変化 …… 96 – 106
第 23 講　関数 $y = ax^2$ の利用 …… 107 – 111
第 24 講　放物線と直線 …… 112 – 113
第 25 講　いろいろな関数 …… 114 – 121

第 5 章　相似な図形

第 26 講　相似な図形 …… 122 – 126
第 27 講　三角形の相似条件 …… 127 – 132
第 28 講　三角形の相似の証明 …… 133 – 136
第 29 講　相似の利用 …… 137 – 138
第 30 講　三角形と線分の比 …… 139 – 144
第 31 講　中点連結定理 …… 145 – 148
第 32 講　平行線と比 …… 149 – 151
第 33 講　相似な図形と面積 …… 152 – 156
第 34 講　相似な立体と表面積・体積 …… 157 – 161

第 6 章　円

第 35 講　円周角の定理 …… 162 – 174
第 36 講　円周角の定理の逆 …… 175 – 177
第 37 講　円周角の定理の利用 …… 178 – 185

第 7 章　三平方の定理

第 38 講　三平方の定理 ………… 186 – 189
第 39 講　特別な直角三角形 … 190 – 193
第 40 講　三平方の定理と平面図形 ………… 194 – 202
第 41 講　三平方の定理と空間図形 ………… 203 – 211

第 8 章　標本調査

第 42 講　標本調査 ………… 212 – 215

教科書対応表 ………… 巻末

第1講・式の展開

例題1 多項式と単項式の乗法・除法

ポイント

● 単項式(たんこうしき)と多項式のかけ算・わり算 → 分配法則を使って計算する

1. 単項式 × 多項式（多項式 × 単項式）

$a(b+c)=a\times b+a\times c$　　$(a+b)c=a\times c+b\times c$　　$(a-b)c=a\times c+(-b)\times c$

2. 多項式 ÷ 単項式

$(a+b)\div c=(a+b)\times\dfrac{1}{c}$

逆数にする

かけ算になおす

$=a\times\dfrac{1}{c}+b\times\dfrac{1}{c}$

問題

次の計算をしなさい。

(1) $2a(a+3b)$

(2) $(3x-8y)\times(-3y)$

(3) $(8a^2-10a)\div 2a$

(4) $(4xy-12xy^2)\div\dfrac{2}{5}y$

解答

(1) $2a(a+3b)$

$=2a\times a+2a\times 3b$

$=\mathbf{2a^2+6ab}$ …(答)

(2) $(3x-8y)\times(-3y)$

$=3x\times(-3y)+(-8y)\times(-3y)$

$=\mathbf{-9xy+24y^2}$ …(答)

MEMO

(3) $(8a^2 - 10a) \div 2a = (8a^2 - 10a) \times \dfrac{1}{2a}$

$= 8a^2 \times \dfrac{1}{2a} + (-10a) \times \dfrac{1}{2a}$

$= \mathbf{4a - 5}$　**･･･(答)**

(4) $(4xy - 12xy^2) \div \dfrac{2}{5}y = (4xy - 12xy^2) \div \dfrac{2y}{5}$

$= (4xy - 12xy^2) \times \dfrac{5}{2y}$

$= 4xy \times \dfrac{5}{2y} + (-12xy^2) \times \dfrac{5}{2y}$

$= \mathbf{10x - 30xy}$　**･･･(答)**

確認テスト 1

次の計算をしなさい。

(1) $-3a(a - 4b)$

(2) $(-6x + 5y) \times 2y$

(3) $(25x^2y + 10xy) \div 5x$

(4) $(-3x^2 + 6x) \div \dfrac{3}{4}x$

例題 2　多項式の乗法

ポイント

● **展開**（てんかい）： 単項式や多項式のかけ算で表された式を，かっこを外してたし算で表すこと

● 多項式と多項式のかけ算

（例）
$$(a+b)(c+d) = \underset{①}{\underline{ac}} + \underset{②}{\underline{ad}} + \underset{③}{\underline{bc}} + \underset{④}{\underline{bd}}$$

● 計算のしくみ

$c+d=M$ とおくと

$$\begin{aligned} &(a+b)\underline{(c+d)} \\ &= (a+b)\underline{\boldsymbol{M}} \\ &= a\underline{\boldsymbol{M}} + b\underline{\boldsymbol{M}} \\ &= a\underline{(c+d)} + b\underline{(c+d)} \\ &= ac+ad+bc+bd \end{aligned}$$

問題

次の式を展開しなさい。

(1)　$(a+3)(b-2)$

(2)　$(a-3b)(2a+b)$

(3)　$(x-2y)(3x-y-4)$

解答

(1)　$(a+3)(b-2)$

$= a \times b + a \times (-2) + 3 \times b + 3 \times (-2)$

$= \boldsymbol{ab-2a+3b-6}$　…**(答)**

MEMO

(1)　$(a+3)(b-2)$

(2)　$(a-3b)(2a+b)$

$= a\times 2a + a\times b + (-3b)\times 2a + (-3b)\times b$

$= 2a^2 + ab - 6ab - 3b^2$

$= \mathbf{2a^2 - 5ab - 3b^2}$　**・・・(答)**

(3)　$(x-2y)(3x-y-4)$

$= x\times 3x + x\times(-y) + x\times(-4)$

$\quad +(-2y)\times 3x + (-2y)\times(-y) + (-2y)\times(-4)$

$= 3x^2 - xy - 4x - 6xy + 2y^2 + 8y$

$= \mathbf{3x^2 - 7xy + 2y^2 - 4x + 8y}$　**・・・(答)**

(2)　$(a-3b)(2a+b)$

(3)　$(x-2y)(3x-y-4)$

確認テスト 2

次の式を展開しなさい。

(1)　$(a-3)(b+5)$

(2)　$(x+2y)(4x-3y)$

(3)　$(x+y)(2x-y+2)$

第２講・乗法公式

例題 1　乗法公式①

ポイント

かけ算

● $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$

たし算

計算のしくみ

$$(x+a)(x+b) = x \times x + x \times b + a \times x + a \times b$$
$$= x^2 + bx + ax + ab$$
$$= x^2 + (a+b)x + ab$$

（例）　$(+5) \times (-9)$

$$(x+5)(x-9) = x^2 - 4x - 45$$

$+5-9$

問題

次の式を展開しなさい。

(1)　$(x+1)(x+3)$

(2)　$(t-2)(t+5)$

(3)　$(x-6y)(x-10y)$

解答

(1)　$(x+1)(x+3) = \boldsymbol{x^2 + 4x + 3}$　…**(答)**

(2)　$(t-2)(t+5) = \boldsymbol{t^2 + 3t - 10}$　…**(答)**

(3)　$(x-6y)(x-10y) = \boldsymbol{x^2 - 16xy + 60y^2}$　…**(答)**

MEMO

確認テスト 1

次の式を展開しなさい。

(1) $(x+5)(x+4)$

(2) $(y+1)(y-9)$

(3) $(a-7b)(a-8b)$

例題 2　乗法公式②

ポイント

● $(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$　　$(x-a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$

（2 乗，2 乗，かけて 2 倍）

（例）$(x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$

（x^2，3^2，$2 \times 3 \times x$）

問題

次の式を展開しなさい。

(1) $(x+2)^2$

(2) $(x-4)^2$

(3) $(-x+3y)^2$

(4) $(2x-3)^2$

解答

(1) $(x+2)^2 = \boldsymbol{x^2 + 4x + 4}$　…(答)

(2) $(x-4)^2 = \boldsymbol{x^2 - 8x + 16}$　…(答)

(3) $(-x+3y)^2 = (-x)^2 + 2 \times 3y \times (-x) + (3y)^2$

$= \boldsymbol{x^2 - 6xy + 9y^2}$　…(答)

MEMO

(4) $(2x-3)^2 = (2x)^2 - 2 \times 3 \times 2x + 3^2$

$= \mathbf{4x^2 - 12x + 9}$ **…(答)**

確認テスト 2

次の式を展開しなさい。

(1) $(x-1)^2$

(2) $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$

(3) $(-x+20)^2$

(4) $(5x-6)^2$

例題 3　乗法公式③

ポイント

2 乗

● $(x+a)(x-a) = x^2 - a^2$

2 乗

（例）

$(5x)^2$

$(5x+2)(5x-2) = 25x^2 - 4$

2^2

問題

次の式を展開しなさい。

(1) $(x-3)(x+3)$

(2) $(6-x)(6+x)$

(3) $(4x+7y)(4x-7y)$

解答

(1) $(x-3)(x+3) = \mathbf{x^2 - 9}$ **…(答)**

(2) $(6-x)(6+x) = \mathbf{36 - x^2}$ **…(答)**

MEMO

(3) $(4x+7y)(4x-7y)=(4x)^2-(7y)^2$

$=\mathbf{16x^2-49y^2}$ …(答)

確認テスト 3

次の式を展開しなさい。

(1) $(x+2y)(x-2y)$

(2) $(5+x)(5-x)$

(3) $\left(\frac{1}{2}x-y\right)\left(\frac{1}{2}x+y\right)$

第３講・乗法公式の利用

例題 1　乗法公式の利用

問題

次の計算をしなさい。

(1) $(x+4)(x-3)+(x+1)^2$

(2) $(a+5)(a-5)-(a-3)(a-2)$

(3) $(x-3)^2-(x+7)(x-7)$

解答

(1) $(x+4)(x-3)+(x+1)^2$

$=(x^2+x-12)+(x^2+2x+1)$

$=x^2+x-12+x^2+2x+1$

$=\mathbf{2x^2+3x-11}$　**…(答)**

(2) $(a+5)(a-5)-(a-3)(a-2)$

$=(a^2-25)-(a^2-5a+6)$

$=a^2-25-a^2+5a-6$

$=\mathbf{5a-31}$　**…(答)**

(3) $(x-3)^2-(x+7)(x-7)$

$=(x^2-6x+9)-(x^2-49)$

$=x^2-6x+9-x^2+49$

$=\mathbf{-6x+58}$　**…(答)**

MEMO

確認テスト 1

次の計算をしなさい。

(1) $(x-2)(x+5)-(x-3)^2$

(2) $(x-1)(x+7)+(x+9)(x-9)$

(3) $(x+6)^2-(x+4)(x-4)$

例題 2　おきかえによる展開

問題

次の式を展開しなさい。

(1)　$(x+y-1)^2$

(2)　$(a+b+5)(a+b-2)$

(3)　$(a+b-2)(a-b-2)$

ポイント

● 2 つの文字や数を別の文字に置いて公式を利用

（例）$a+b=A$ とおくと

$$
\begin{aligned}
&(\underline{\boldsymbol{a+b}}+c)^2\\
&=(\underline{\boldsymbol{A}}+c)^2\\
&=\underline{\boldsymbol{A}}^2+2\underline{\boldsymbol{A}}c+c^2\\
&=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2\\
&=(a^2+2ab+b^2)+(2ac+2bc)+c^2\\
&=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca
\end{aligned}
$$

公式を利用して展開

A を $(a+b)$ に直す

解答

(1)　$x+y=A$ とおくと

$$
\begin{aligned}
&(x+y-1)^2\\
&=(A-1)^2\\
&=A^2-2A+1\\
&=(x+y)^2-2(x+y)+1\\
&=\boldsymbol{x^2+2xy+y^2-2x-2y+1}
\end{aligned}
$$
…(答)

MEMO

⑵ $a + b = A$ とおくと

$$\begin{aligned} &(a+b+5)(a+b-2) \\ =\ &(A+5)(A-2) \\ =\ &A^2+3A-10 \\ =\ &(a+b)^2+3(a+b)-10 \\ =\ &\boldsymbol{a^2+2ab+b^2+3a+3b-10} \end{aligned}$$
…(答)

⑶ $(a+b-2)(a-b-2)$ を変形すると

$(a-2+b)(a-2-b)$

$a-2=A$ とおくと

$$\begin{aligned} &(a-2+b)(a-2-b) \\ =\ &(A+b)(A-b) \\ =\ &A^2-b^2 \\ =\ &(a-2)^2-b^2 \\ =\ &(a^2-4a+4)-b^2 \\ =\ &\boldsymbol{a^2-b^2-4a+4} \end{aligned}$$
…(答)

確認テスト 2

次の式を展開しなさい。

⑴ $(a-b+3)^2$

⑵ $(x+y+4)(x+y-4)$

⑶ $(x+2y-1)(x-2y-1)$

第4講・因数分解

例題 1 共通因数でくくる因数分解

ポイント

- **因数**（いんすう）：ある多項式を，2つ以上の単項式や多項式のかけ算で表したときの，一つひとつの式や数。

- **共通因数**：すべての項に共通してふくまれて，くくり出せる文字や数

（例）$x(x+3)$ を展開すると，x^2+3x
→ 逆に，$x^2+3x=x(x+3)$ ともどしたとき，x と $(x+3)$ は $x(x+3)$ の因数

- **因数分解**：多項式をいくつかの因数のかけ算の形で表すこと

$$x^2+3x \ \underset{\text{展開}}{\overset{\text{因数分解}}{\rightleftarrows}}\ x(x+3)$$

x：共通因数　$(x+3)$：因数

問題

次の式を因数分解しなさい。

(1) $ax+ay$
(2) $2ax-8ay$
(3) $4a^2b^2-10a^2b-2ab$

解答

(1) $ax+ay$

$=\boldsymbol{a(x+y)}$ …**(答)**

(2) $2ax-8ay$

$=\boldsymbol{2a(x-4y)}$ …**(答)**

(3) $4a^2b^2-10a^2b-2ab$

$=\boldsymbol{2ab(2ab-5a-1)}$ …**(答)**

MEMO

確認テスト 1

次の式を因数分解しなさい。

(1) $ab - bc$

(2) $x^2y - xy^2 + xy$

(3) $-6ab^2 + 4ab - 12b^2$

例題 2 公式による因数分解①

ポイント

かけ算

$a \times b$

● $x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$

$a + b$

たし算

（例）

5×2

$x^2 + 7x + 10 = (x + 5)(x + 2)$

$5 + 2$

問題

次の式を因数分解しなさい。

(1) $x^2 + 4x + 3$

(2) $x^2 - 12x + 35$

(3) $x^2 - 4x - 5$

解答

(1) $x^2 + 4x + 3 = \mathbf{(x + 1)(x + 3)}$ **・・・(答)**

(2) $x^2 - 12x + 35 = \mathbf{(x - 5)(x - 7)}$ **・・・(答)**

(3) $x^2 - 4x - 5 = \mathbf{(x + 1)(x - 5)}$ **・・・(答)**

MEMO

確認テスト 2

次の式を因数分解しなさい。

(1)　$x^2 + 6x + 5$

(2)　$x^2 - 3x + 2$

(3)　$x^2 + 2x - 3$

(4)　$x^2 - 4x - 12$

例題 3　公式による因数分解②

ポイント

2 乗　2 乗

● $x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$

かけて 2 倍

2 乗　2 乗

$x^2 - 2ax + a^2 = (x - a)^2$

かけて 2 倍

(例)

x^2　3^2

$x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$

$2 \times 3 \times x$

問題

次の式を因数分解しなさい。

(1)　$x^2 - 12x + 36$

(2)　$x^2 + 8xy + 16y^2$

(3)　$9x^2 + 6x + 1$

解答

(1)　$x^2 - 12x + 36 = x^2 - 2 \times 6 \times x + 6^2$

$= \mathbf{(x - 6)^2}$　**…(答)**

(2)　$x^2 + 8xy + 16y^2 = x^2 + 2 \times 4y \times x + (4y)^2$

$= \mathbf{(x + 4y)^2}$　**…(答)**

MEMO

(3)　$9x^2 + 6x + 1 = (3x)^2 + 2 \times 1 \times 3x + 1^2$

$= \mathbf{(3x + 1)^2}$　**・・・(答)**

確認テスト 3

次の式を因数分解しなさい。

(1)　$x^2 - 14x + 49$

(2)　$a^2 + 16ab + 64b^2$

(3)　$4x^2 + 4x + 1$

例題 4　公式による因数分解③

ポイント

2乗

● $x^2 - a^2 = (x + a)(x - a)$

2乗

（例）

x^2

$x^2 - 25 = (x + 5)(x - 5)$

5^2

問題

次の式を因数分解しなさい。

(1)　$x^2 - 9$

(2)　$81 - y^2$

(3)　$25x^2 - 49y^2$

解答

(1)　$x^2 - 9 = \mathbf{(x + 3)(x - 3)}$　…（答）

(2)　$81 - y^2 = \mathbf{(9 + y)(9 - y)}$　…（答）

(3)　$25x^2 - 49y^2 = (5x)^2 - (7y)^2$

$= \mathbf{(5x + 7y)(5x - 7y)}$　…（答）

MEMO

確認テスト 4

次の式を因数分解しなさい。

(1)　$x^2 - y^2$

(2)　$25 - x^2$

(3)　$49a^2 - 36b^2$

第5講・いろいろな因数分解

例題 1 因数分解の公式の利用

問題

次の式を因数分解しなさい。

(1) $ax^2+5ax+4a$

(2) $2x^2-2x-24$

(3) $-x^2+4x-4$

(4) $7x^2-28$

解答

(1) $ax^2+5ax+4a=a(x^2+5x+4)$

$=\boldsymbol{a(x+1)(x+4)}$ **…(答)**

(2) $2x^2-2x-24=2(x^2-x-12)$

$=\boldsymbol{2(x+3)(x-4)}$ **…(答)**

(3) $-x^2+4x-4=-(x^2-4x+4)$

$=\boldsymbol{-(x-2)^2}$ **…(答)**

(4) $7x^2-28=7(x^2-4)$

$=\boldsymbol{7(x+2)(x-2)}$ **…(答)**

MEMO

確認テスト 1

次の式を因数分解しなさい。

(1) $-3x^2-6x+24$

(2) $x^2y-6xy+9y$

(3) $2bx^2-6bx-20b$

(4) $50x^2-32y^2$

例題 2　おきかえによる因数分解

問題

次の式を因数分解しなさい。

(1)　$(x-1)^2+6(x-1)+5$

(2)　$3a(a-b)+b(a-b)$

(3)　$(a+b)^2-c^2$

ポイント

● 式の一部をひとかたまりとして，別の文字で置きかえる

（例）$(a+b)^2+2(a+b)c+c^2$ の因数分解

$a+b=A$ とおくと

$(\boldsymbol{a+b})^2+2(\boldsymbol{a+b})c+c^2$

$a+b$ を A に置きかえる

$=A^2+2Ac+c^2$

$=(A+c)^2$

公式を利用して因数分解

A を $a+b$ に直す

$=(a+b+c)^2$

解答

(1)　$x-1=A$ とおくと

$$(x-1)^2+6(x-1)+5=A^2+6A+5$$
$$=(A+1)(A+5)$$
$$=\{(x-1)+1\}\{(x-1)+5\}$$
$$=\boldsymbol{x(x+4)}\quad\cdots\text{(答)}$$

(2)　$a-b=A$ とおくと

$$3a(a-b)+b(a-b)=3aA+bA$$
$$=A(3a+b)$$
$$=\boldsymbol{(a-b)(3a+b)}\quad\cdots\text{(答)}$$

MEMO

(3)　$a+b=A$ とおくと

$$\begin{aligned}(a+b)^2-c^2&=A^2-c^2\\&=(A+c)(A-c)\\&=\{(a+b)+c\}\{(a+b)-c\}\\&=\boldsymbol{(a+b+c)(a+b-c)}\end{aligned}$$　…**(答)**

確認テスト 2

次の式を因数分解しなさい。

(1)　$(x+y)^2-6(x+y)+9$

(2)　$y(x+2)-(x+2)$

(3)　$a^2-(2b-1)^2$

第 6 講・式の計算の利用

例題 1　因数分解を利用する計算

問題

次の式を工夫して計算しなさい。

(1)　$72^2 - 68^2$

(2)　$105^2 - 5 \times 105$

解答

(1)　$72^2 - 68^2 = (72 + 68)(72 - 68)$
$= 140 \times 4$
$= \mathbf{560}$　・・・(答)

(2)　$105^2 - 5 \times 105 = 105(105 - 5)$
$= 105 \times 100$
$= \mathbf{10500}$　・・・(答)

MEMO

確認テスト 1

次の式を工夫して計算しなさい。

(1)　$55^2 - 45^2$

(2)　$87 \times 36 + 64 \times 87$

例題 2　式の展開を利用する計算

問題

次の式を工夫して計算しなさい。

(1) 39^2

(2) 52×48

解答

(1) $39^2 = (40 - 1)^2$

$= 40^2 - 2 \times 1 \times 40 + 1^2$

$= 1600 - 80 + 1$

$= \mathbf{1521}$ ・・・(答)

(2) $52 \times 48 = (50 + 2)(50 - 2)$

$= 50^2 - 2^2$

$= 2500 - 4$

$= \mathbf{2496}$ ・・・(答)

MEMO

確認テスト 2

次の式を工夫して計算しなさい。

(1) 32^2

(2) 71×69

例題 3　式の値の計算

問題

次の問いに答えなさい。

(1)　$x = 28$ のとき，$x^2 + 4x + 4$ の値を求めなさい。

(2)　$x = 4$，$y = -3$ のとき，$(x + y)(x - 2y) + y(x + 2y)$ の値を求めなさい。

解答

(1)　$x = 28$ より

$$\begin{aligned} x^2 + 4x + 4 &= (x + 2)^2 \\ &= (28 + 2)^2 \\ &= 30^2 \\ &= \mathbf{900} \end{aligned}$$

…(答)

(2)

$$\begin{aligned} &(x + y)(x - 2y) + y(x + 2y) \\ &= x^2 - xy - 2y^2 + xy + 2y^2 \\ &= x^2 \end{aligned}$$

$x = 4$ より

$x^2 = \mathbf{16}$　…(答)

MEMO

確認テスト 3

次の問いに答えなさい。

(1)　$x = -13$ のとき，$x^2 - 3x - 18$ の値を求めなさい。

(2)　$x = 35$ のとき，$(x + 3)(x - 3) - x(x - 4)$ の値を求めなさい。

第7講・式の計算による証明

例題 1　整数に関する証明問題

ポイント

n を整数とすると

- 連続する整数 ： $\ldots$，$n-1$，n，$n+1$，$n+2$，$\ldots$
- 連続する偶数（ぐうすう） ： $\ldots$，$2n-2$，$2n$，$2n+2$，$2n+4$，$\ldots$
- 連続する奇数（きすう） ： $\ldots$，$2n-1$，$2n+1$，$2n+3$，$2n+5$，$\ldots$

問題

連続する 3 つの整数がある。中央の数の 2 乗から 1 をひいた数は，残りの 2 数の積に等しいことを証明しなさい。

解答

3 つの連続する整数は，整数 n を使って

$$n,\ n+1,\ n+2$$

と表せる。このとき，中央の数の 2 乗から 1 をひいた数は

$$\begin{aligned} &(n+1)^2-1 \\ =\ &n^2+2n+1-1 \\ =\ &n^2+2n \\ =\ &n(n+2) \end{aligned}$$

これは中央の数以外の 2 数の積に等しい。したがって，中央の数の 2 乗から 1 をひいた数は，残りの 2 数の積に等しい。**（証明終）**

MEMO

確認テスト 1

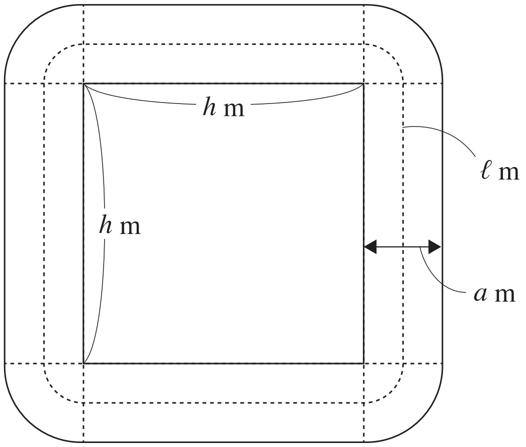
連続する 3 つの整数がある。中央の数の 2 乗から 1 をひいた数は，残りの 2 数の積に等しいことを次のように証明したい。このとき，空欄 (1) ～ (3) を埋めなさい。

【証明】
3 つの連続する整数は，整数 n を使って
(1)
と表せる。このとき，中央の数の 2 乗から 1 をひいた数は
$\left(\boxed{(2)} \right)^2 - 1$
これを計算すると (3) となり，中央の数以外の 2 数の積に等しい。したがって，中央の数の 2 乗から 1 をひいた数は，残りの 2 数の積に等しい。**(証明終)**

例題 2 道幅に関する証明問題

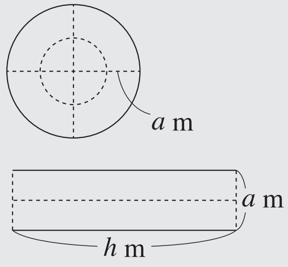
問題

右の図のような 1 辺の長さが h m の正方形の土地の周囲に，幅 a m の道があります。この道の真ん中を通る線の長さを ℓ m，この道の面積を S m^2 とするとき
$S = a\ell$
となることを証明しなさい。



ポイント

● 道のうち，四つ角の部分をつなぎ合わせると半径 a m の円になる。また，四つ角以外の部分は横 h m，縦 a m の長方形 4 つに分けられる。このことを利用して S，ℓ をそれぞれ a，h の式で表し
$S = a\ell$
となることを証明する。



解答

道のうち，四つ角の部分をつなぎ合わせると円になり，それ以外の部分は長方形 4 つに分けられる。

よって，道の面積は

$S = \pi a^2 + 4 \times h \times a$

$= \pi a^2 + 4ha$　…①

一方，道の真ん中を通る線の長さは

$\ell = 2\pi \times \frac{1}{2}a + 4 \times h$

$= \pi a + 4h$

となる。この式の両辺に a をかけて

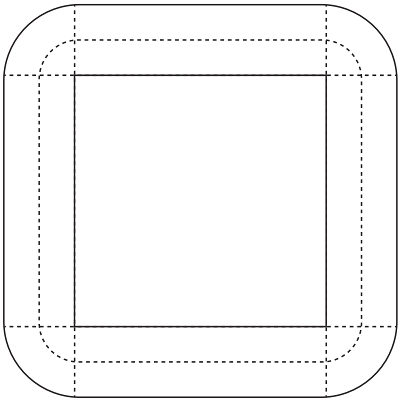
$a\ell = a(\pi a + 4h)$

$= \pi a^2 + 4ha$　…②

①，②より

$S = a\ell$　**（証明終）**

MEMO

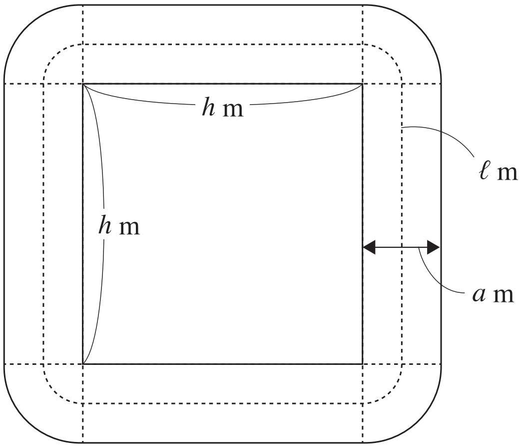


確認テスト 2

右の図のような 1 辺の長さが h m の正方形の土地の周囲に，幅 a m の道があります。この道の真ん中を通る線の長さを ℓ m，この道の面積を S m^2 とするとき

$S = a\ell$

となることを次のように証明したい。このとき，空欄 (1) ～ (3) を埋めなさい。



【証明】

道の面積は

$S =$ (1)　…①

一方，道の真ん中を通る線の長さは

$\ell =$ (2)

となる。この式の両辺に a をかけて

$a\ell =$ (3)　…②

①，②より

$S = a\ell$　**（証明終）**

［メモ］

第8講・平方根

例題1 平方根の表し方

ポイント

- **平方根**（へいほうこん）：2乗すると a になる数。
  ただし，0の平方根は0のみで，負の数の平方根はない。

（例）$16 \underset{\text{2乗する}}{\overset{\text{平方根}}{\rightleftarrows}} \pm 4$
　　　　└ $+4$ と -4

- **根号**（こんごう）：記号 $\sqrt{}$ のことで，$a > 0$ のとき，a の平方根は $\pm\sqrt{a}$（正の平方根 $+\sqrt{a}$，負の平方根 $-\sqrt{a}$）と表す。$\sqrt{a^2} = a$ となる。

（例）10の平方根は，$\pm\sqrt{10}$

問題

次の数の平方根を答えなさい。

(1) 4

(2) 3

(3) $\dfrac{16}{25}$

(4) 0

解答

(1) $\pm\sqrt{4}$

$= \pm\sqrt{2^2}$

$= \pm 2$ …(答)

(2) $\pm\sqrt{3}$ …(答)

MEMO

(3) $\pm\sqrt{\dfrac{16}{25}}$

$= \pm\dfrac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}}$

$= \pm\dfrac{\sqrt{4^2}}{\sqrt{5^2}}$

$= \pm\dfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}}$　**…(答)**

(4) $\mathbf{0}$　**…(答)**

確認テスト 1

次の数の平方根を答えなさい。

(1) 15

(2) 36

(3) $\dfrac{25}{64}$

(4) 0.36

例題 2　根号を使わない表し方①

ポイント

● 根号の性質（$\sqrt{\ }$ の中に 2 乗がつく場合）

$a > 0$ のとき，

① $\sqrt{a^2} = a$　② $-\sqrt{a^2} = -a$　③ $\sqrt{(-a)^2} = \sqrt{a^2} = a$

問題

次の数を，根号を使わずに表しなさい。

(1) $\sqrt{25}$

(2) $\sqrt{(-8)^2}$

(3) $\sqrt{\left(\dfrac{3}{4}\right)^2}$

(4) $-\sqrt{0.25}$

解答

(1)　$\sqrt{25}$

$= \mathbf{5}$　**・・・(答)**

(2)　$\sqrt{(-8)^2}$

$= \sqrt{64}$

$= \sqrt{8^2}$

$= \mathbf{8}$　**・・・(答)**

(3)　$\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2}$

$= \mathbf{\frac{3}{4}}$　**・・・(答)**

(4)　$-\sqrt{0.25}$

$= -\sqrt{0.5^2}$

$= \mathbf{-0.5}$　**・・・(答)**

MEMO

確認テスト 2

次の数を，根号を使わずに表しなさい。

(1)　$\sqrt{6^2}$

(2)　$\sqrt{(-7)^2}$

(3)　$-\sqrt{\frac{25}{49}}$

(4)　$\sqrt{0.09}$

例題 3　根号を使わない表し方②

ポイント

● 根号の性質（$\sqrt{\ }$ 全体に 2 乗がつく場合）
$a > 0$ のとき，
① $(\sqrt{a})^2 = a$　② $(-\sqrt{a})^2 = a$

問題

次の数を求めなさい。
(1) $(\sqrt{3})^2$
(2) $(-\sqrt{15})^2$

解答

(1) $(\sqrt{3})^2$
$= \mathbf{3}$ **…(答)**

(2) $(-\sqrt{15})^2$
$= \mathbf{15}$ **…(答)**

MEMO

確認テスト 3

次の数を求めなさい。
(1) $(-\sqrt{4})^2$
(2) $(\sqrt{7})^2$

例題 4　平方根の性質

問題

次の下線部の内容について，正しければ○，誤りがあれば×で答えなさい。

(1)　25 の平方根は，<u>5</u> である。

(2)　-100 の平方根は，<u>-10</u> である。

(3)　$-\sqrt{49}$ は，<u>-7</u> である。

(4)　$\sqrt{(-3)^2}$ は，<u>-3</u> である。

解答

(1)　25 の平方根は，± 5 である。
　　×　…(答)

(2)　-100 は負の数なので，平方根はない。
　　×　…(答)

(3)　$-\sqrt{49} = -\sqrt{7^2} = -7$ となる。
　　○　…(答)

(4)　$\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = \sqrt{3^2} = 3$ となる。
　　×　…(答)

MEMO

確認テスト 4

次の下線部の内容について，正しいか誤っているか，また誤っている場合は正しい内容を答えなさい。

(1)　81 の平方根は，<u>± 9 である。</u>

(2)　-25 の平方根は，<u>-5 である。</u>

(3)　$(-\sqrt{6})^2$ は，<u>6 である。</u>

(4)　$\sqrt{(-2)^2}$ は，<u>2 である。</u>

第 9 講・平方根の大小

例題 1　平方根の大小①

問題

次の各組の大小を，不等号を使って，左から小さい順で表しなさい。

(1)　$\sqrt{5}, \sqrt{7}$

(2)　$\sqrt{0.1}, 0.1$

(3)　$-\sqrt{39}, -6$

(4)　$5, \sqrt{23}, \sqrt{29}$

ポイント

- $a>0, b>0$ のとき，$a<b$ ならば，$\sqrt{a}<\sqrt{b}$
- 平方根の大小 → すべて $\sqrt{}$ で表して，$\sqrt{}$ の中の数の大きさを比べる

（例）$4, \sqrt{15}$ → $4>\sqrt{15}$

$\sqrt{4^2}=\sqrt{16}$ より　　または $\sqrt{15}<4$

$\sqrt{16}>\sqrt{15}$

解答

(1)　$\mathbf{\sqrt{5}<\sqrt{7}}$　**…(答)**

(2)　$0.1=\sqrt{0.01}$であり，$\sqrt{0.01}<\sqrt{0.1}$ なので

$\mathbf{0.1<\sqrt{0.1}}$　**…(答)**

(3)　$-6=-\sqrt{6^2}=-\sqrt{36}$ であることと，

$\sqrt{39}>\sqrt{36}$ より $-\sqrt{39}<-\sqrt{36}$

よって

$\mathbf{-\sqrt{39}<-6}$　**…(答)**

MEMO

(4)　$5 = \sqrt{5^2} = \sqrt{25}$ より，$\sqrt{23} < \sqrt{25} < \sqrt{29}$

よって

$\sqrt{23} < 5 < \sqrt{29}$　…(答)

確認テスト 1

次の各組の大小を，不等号を使って，左から小さい順で表しなさい。

(1)　$\sqrt{8}, \sqrt{11}$

(2)　$\sqrt{0.5}, 0.5$

(3)　$-3, -\sqrt{10}$

(4)　$\sqrt{51}, 7, \sqrt{48}$

例題 2　平方根の大小②

ポイント

● 平方根の大小 → すべての数を $\sqrt{}$ で表して，条件にあう数を調べる

問題

次の問いに答えなさい。

(1)　$6.5 < \sqrt{a} < 7$ をみたす自然数 a を**すべて**求めなさい。
(2)　$\sqrt{5} < x < \sqrt{30}$ をみたす自然数 x を**すべて**求めなさい。

解答

(1)　$6.5 < \sqrt{a} < 7$

$\sqrt{6.5^2} < \sqrt{a} < \sqrt{7^2}$

$\sqrt{42.25} < \sqrt{a} < \sqrt{49}$

$42.25 < a < 49$

$\boldsymbol{a = 43, 44, 45, 46, 47, 48}$　**…(答)**

(2)　$\sqrt{5} < x < \sqrt{30}$

$\sqrt{5} < \sqrt{x^2} < \sqrt{30}$

$5 < x^2 < 30$

$\boldsymbol{x = 3, 4, 5}$　**…(答)**

MEMO

(2)

x	x^2

確認テスト 2

次の問いに答えなさい。

(1)　$3.5 < \sqrt{a} < 4$ をみたす自然数 a の個数を求めなさい。
(2)　$\sqrt{8} < x < \sqrt{50}$ をみたす自然数 x の個数を求めなさい。

第10講・近似値・有効数字

例題1 近似値

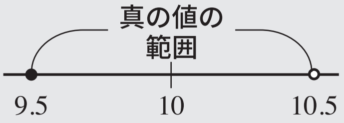
ポイント

● 近似値 ： 真の値（正確な値）に近い値のこと。
測定によって得られた重さや長さなど

（例）円周率 3.14→ 円周率は 3.1415…と続くが，小数第 3 位を四捨五入

● 誤差 ： 近似値から真の値をひいた差

（例）小数第 1 位を四捨五入すると 10 となる，ある数 a



⇨ $9.5 \leqq a < 10.5$

→ 誤差の絶対値は 0.5 以下

問題

次の問いに答えなさい。

(1) ある数 a の小数第 1 位を四捨五入して近似値を求めたら 11 になった。ある数 a の値の範囲を，不等号を使って表しなさい。

(2) ある数 b の小数第 2 位を四捨五入して近似値を求めたら 4.5 になった。ある数 b の値の範囲を，不等号を使って表しなさい。

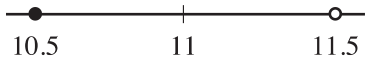
(3) ある数 c の小数第 2 位を四捨五入して近似値を求めたら 1.7 になった。このとき，ある数 c と近似値 1.7 との誤差 x は，次のように表される。□にあてはまる数を答えなさい。

$-0.05 < x \leqq$ □

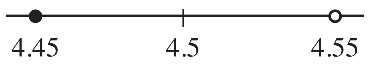
解答

(1) **$10.5 \leqq a < 11.5$** …(答)

MEMO

(1)


⑵　**$4.45 \leqq b < 4.55$　…(答)**

⑵ 

⑶　ある数 c の値の範囲は，$1.65 \leqq c < 1.75$ となる。
よって，□ にあてはまる値は **0.05**　…(答)

⑶　(誤差)＝(近似値)－(真の値)

確認テスト 1

次の問いに答えなさい。

⑴　ある数 a の小数第 1 位を四捨五入して近似値を求めたら 15 になった。ある数 a の値の範囲を，不等号を使って表しなさい。

⑵　ある数 b の小数第 2 位を四捨五入して近似値を求めたら 3.4 になった。ある数 b の値の範囲を，不等号を使って表しなさい。

⑶　ある数 c の小数第 3 位を四捨五入して近似値を求めたら 4.09 になった。このとき，ある数 c と近似値 4.09 との誤差 x は，次のように表される。□ にあてはまる数を答えなさい。

□ $< x \leqq 0.005$

例題 2　有効数字の表し方

ポイント

● 有効数字 ： 測定などによって得られた値の中で，結果として信頼できる数。有効数字がどこまでの値かしめすために，(整数部分が 1 けたの小数)×(10 の累乗)の形で表す

（例）水の量を測ったところ，4850 mL であった
・有効数字が 3 けた（4，8，5）　→ 4.85×10^3
・有効数字が 4 けた（4，8，5，0）→ 4.850×10^3

問 題

次の問いに答えなさい。

(1)　ある土地の面積を測定したときの測定値は 36700 m^2 であった。有効数字 3 けたのとき，土地の面積を（整数部分が 1 けたの小数)×(10 の累乗）の形で表しなさい。

(2)　A 町から B 町までの距離を測定したときの測定値は 42000 m であった。有効数字 4 けたのとき，距離を（整数部分が 1 けたの小数)×(10 の累乗）の形で表しなさい。

解 答

(1)　有効数字 3 けたで表すので，
　　$\mathbf{3.67 \times 10^4}$（$m^2$）　**…(答)**

(2)　有効数字 4 けたで表すので，
　　$\mathbf{4.200 \times 10^4}$（m）　**…(答)**

MEMO

確認テスト 2

次の問いに答えなさい。

(1)　プールの水の量を測定したときの測定値は 3210 m^3 であった。有効数字 3 けたのとき，水の量を（整数部分が 1 けたの小数)×(10 の累乗）の形で表しなさい。

(2)　ある機械の重さを測定したときの測定値は 29000 kg であった。有効数字 4 けたのとき，機械の重さを（整数部分が 1 けたの小数)×(10 の累乗）の形で表しなさい。

第11講・有理数・無理数

例題1 有理数・無理数の区別

ポイント

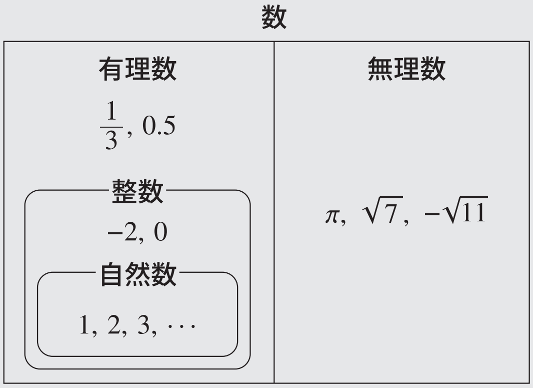
● 有理数 ： 分母と分子が整数の分数で表すことができる数

（例）$2, \frac{1}{3}, \sqrt{16}, 0.5, 0$

$2 = \frac{2}{1}$，$\sqrt{16} = 4 = \frac{4}{1}$，$0.5 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$，$0 = \frac{0}{1}, \frac{0}{2}, \cdots$

● 無理数 ： 有理数以外の数。つまり，分母と分子が整数の分数で表せない数。

（例）$\pi, \sqrt{7}, -\sqrt{11}$



問題

次の数を，有理数と無理数に分けなさい。

$-\sqrt{13}, \sqrt{49}, 1.8, \frac{4}{7}, \sqrt{\frac{25}{36}}, \sqrt{3}, \pi, \sqrt{19}$

解答

次の数は有理数。

$$\sqrt{49}=7=\frac{7}{1},\ 1.8=\frac{18}{10}=\frac{9}{5},\ \frac{4}{7},\ \sqrt{\frac{25}{36}}=\frac{5}{6}$$

有理数：$\boldsymbol{\sqrt{49},\ 1.8,\ \frac{4}{7},\ \sqrt{\frac{25}{36}}}$　**…(答)**

無理数：$\boldsymbol{-\sqrt{13},\ \sqrt{3},\ \pi,\ \sqrt{19}}$　**…(答)**

MEMO

確認テスト 1

次の数の中から，無理数を**すべて**答えなさい。

$$\sqrt{17},\ -\sqrt{25},\ -\frac{5}{8},\ \sqrt{\frac{9}{49}},\ -\sqrt{5},\ \pi$$

例題 2　循環小数①

ポイント

● 小数の種類

1 有限小数 ： 小数点以下が，限りのある小数

（例） $\dfrac{1}{4}=0.25$　　$\dfrac{8}{5}=1.6$

2 無限小数 ： 小数点以下が，限りなく続く小数

（例） $\pi=3.14159265\cdots$

● 循環小数 ： 小数点以下が無限に続いて，同じ組の数字がくり返す無限小数

（例） $\dfrac{1}{3}=0.333\cdots$　　$\dfrac{7}{11}=0.636363\cdots$

● 分数を循環小数で表す計算 → くり返す数字の組をみつけて，最初と最後の数の上に●をつける

（例） $\dfrac{1}{3}=1\div 3=0.3\,3\,3\cdots=0.\dot{3}$（くり返す）　　$\dfrac{7}{11}=7\div 11=0.63\,63\,63\cdots=0.\dot{6}\dot{3}$（くり返す）

問題

次の分数を循環小数で表しなさい。

(1) $\dfrac{8}{33}$

(2) $\dfrac{5}{12}$

解答

(1) $\dfrac{8}{33}=8\div 33=0.242424\cdots$ より

$0.\dot{2}\dot{4}$ …(答)

(2) $\dfrac{5}{12}=5\div 12=0.416666\cdots$ より

$0.41\dot{6}$ …(答)

MEMO

確認テスト 2

次の分数を循環小数で表しなさい。

(1) $\dfrac{8}{15}$

(2) $\dfrac{9}{11}$

例題 3 循環小数②

ポイント

● 循環小数を分数に直す計算 → 循環小数を x とおいて，**くり返す数字の個数だけ 10 倍した式**をつくる

（例）$0.\dot{1}2\dot{5}$ を分数で表す

連立方程式

$x = 0.\dot{1}2\dot{5} = 0.125125125\cdots$

└くり返す数は 1, 2, 5 の 3 個あるので，両辺を $10 \times 10 \times 10 = 1000$ 倍した式をつくる

$1000x = 125.125125125\cdots$

問 題

次の循環小数を分数で表しなさい。

(1) $0.\dot{3}\dot{9}$

(2) $0.\dot{1}6\dot{8}$

解答

(1)　$x = 0.\dot{3}\dot{9}$ とする。

$$\begin{array}{rrl} & 100x = & 39.3939\cdots \\ -) & x = & 0.3939\cdots \\ \hline & 99x = & 39 \end{array}$$

$$x = \frac{39}{99}$$

$$x = \mathbf{\frac{13}{33}}$$ **…(答)**

(2)　$x = 0.\dot{1}6\dot{8}$ とする。

$$\begin{array}{rrl} & 1000x = & 168.168168\cdots \\ -) & x = & 0.168168\cdots \\ \hline & 999x = & 168 \end{array}$$

$$x = \frac{168}{999}$$

$$x = \mathbf{\frac{56}{333}}$$ **…(答)**

MEMO

確認テスト 3

次の循環小数を分数で表しなさい。

(1)　$0.\dot{1}\dot{5}$

(2)　$0.\dot{2}7\dot{3}$

第12講・$\sqrt{\ }$ のついた数の積・商

例題 1 $\sqrt{\ }$ のついた数の積

ポイント

● $\sqrt{\ }$ の数どうしのかけ算

$a>0$，$b>0$ のとき，$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\times b}$

（例）$\sqrt{2}\times\sqrt{7}=\sqrt{2\times7}=\sqrt{14}$

問題

次の計算をしなさい。

(1) $\sqrt{3}\times\sqrt{10}$

(2) $\sqrt{20}\times(-\sqrt{5})$

解答

(1) $\sqrt{3}\times\sqrt{10}=\sqrt{3\times10}$

$=\sqrt{30}$ …(答)

(2) $\sqrt{20}\times(-\sqrt{5})=-\sqrt{20\times5}$

$=-\sqrt{100}$

$=-10$ …(答)

MEMO

確認テスト 1

次の計算をしなさい。

(1) $\sqrt{12}\times\sqrt{3}$

(2) $\sqrt{5}\times\sqrt{7}$

例題 2　$\sqrt{}$ のついた数の商

ポイント

● $\sqrt{}$ の数どうしのわり算

$a>0$，$b>0$ のとき $\sqrt{a} \div \sqrt{b} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$

（例）　$\sqrt{24} \div \sqrt{6} = \dfrac{\sqrt{24}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\dfrac{24}{6}} = \sqrt{4} = 2$

問題

次の計算をしなさい。

(1)　$\dfrac{\sqrt{56}}{\sqrt{8}}$

(2)　$\sqrt{42} \div \sqrt{3}$

(3)　$\sqrt{8} \div \sqrt{2}$

解答

(1)　$\dfrac{\sqrt{56}}{\sqrt{8}} = \sqrt{\dfrac{56}{8}}$

$= \boldsymbol{\sqrt{7}}$　**…(答)**

(2)　$\sqrt{42} \div \sqrt{3} = \dfrac{\sqrt{42}}{\sqrt{3}}$

$= \sqrt{\dfrac{42}{3}}$

$= \boldsymbol{\sqrt{14}}$　**…(答)**

MEMO

(3)　$\sqrt{8} \div \sqrt{2} = \dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$

$= \sqrt{\dfrac{8}{2}}$

$= \sqrt{4}$

$= \mathbf{2}$　**…(答)**

確認テスト 2

次の計算をしなさい。

(1)　$\dfrac{\sqrt{28}}{\sqrt{7}}$

(2)　$\sqrt{30} \div \sqrt{5}$

(3)　$\sqrt{20} \div (-\sqrt{5})$

第13講・根号をふくむ式の乗法・除法

例題 1 $\sqrt{a}$ の形にする変形

ポイント

● $a\sqrt{b}$ を $\sqrt{\quad}$ だけの形に変形する計算 →$\sqrt{\quad}$ の外にある整数の部分を 2 乗して $\sqrt{\quad}$ に直す

$a>0$，$b>0$ のとき，

① $a\sqrt{b}=\sqrt{a^2}\times\sqrt{b}=\sqrt{a^2b}$

② $\dfrac{\sqrt{a}}{b}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b^2}}=\sqrt{\dfrac{a}{b^2}}$

（例）$2\sqrt{3}=\sqrt{4}\times\sqrt{3}=\sqrt{4\times3}=\sqrt{12}$

問題

次の数を変形して，$\sqrt{a}$ の形にしなさい。

(1) $4\sqrt{5}$

(2) $\dfrac{\sqrt{12}}{2}$

解答

(1) $4\sqrt{5}=\sqrt{16}\times\sqrt{5}$
$=\sqrt{16\times5}$
$=\mathbf{\sqrt{80}}$ …**(答)**

(2) $\dfrac{\sqrt{12}}{2}=\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{4}}$
$=\sqrt{\dfrac{12}{4}}$
$=\mathbf{\sqrt{3}}$ …**(答)**

MEMO

確認テスト 1

次の数を変形して，$\sqrt{a}$ の形にしなさい。

(1)　$3\sqrt{7}$

(2)　$\dfrac{\sqrt{80}}{4}$

例題 2　$\sqrt{}$ の中を簡単な数にする変形

ポイント

● $\sqrt{}$ だけの式を $a\sqrt{b}$ の形に変形する計算 →$\sqrt{}$ の中で 2 乗の数をみつけて，$\sqrt{}$ の外に出す

$a>0$，$b>0$ のとき，

①　$\sqrt{a^2\times b}=a\sqrt{b}$

②　$\sqrt{\dfrac{a}{b^2}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b^2}}=\dfrac{\sqrt{a}}{b}$

問題

次の $\sqrt{}$ の中を，できるだけ簡単な数にしなさい。

(1)　$\sqrt{45}$

(2)　$\sqrt{432}$

(3)　$\sqrt{\dfrac{19}{49}}$

解答

(1)　$\sqrt{45}=\sqrt{9\times5}$

$=\sqrt{9}\times\sqrt{5}$

$=\mathbf{3\sqrt{5}}$　**…(答)**

MEMO

(2) $\sqrt{432} = \sqrt{4^2 \times 3^2 \times 3}$

$= \sqrt{4^2} \times \sqrt{3^2} \times \sqrt{3}$

$= 4 \times 3 \times \sqrt{3}$

$= \mathbf{12\sqrt{3}}$ **…(答)**

(2) $)\underline{432}$

$)\underline{\quad\quad}$

$)\underline{\quad\quad}$

$)\underline{\quad\quad}$

$)\underline{\quad\quad}$

$)\underline{\quad\quad}$

(3) $\sqrt{\dfrac{19}{49}} = \dfrac{\sqrt{19}}{\sqrt{49}}$

$= \dfrac{\boldsymbol{\sqrt{19}}}{\mathbf{7}}$ **…(答)**

確認テスト 2

次の $\sqrt{}$ の中を，できるだけ簡単な数にしなさい。

(1) $\sqrt{28}$

(2) $\sqrt{216}$

(3) $\sqrt{\dfrac{7}{64}}$

例題 3 分母の有理化

ポイント

● 分母の**有理化** ： 分母に $\sqrt{}$ がない形に変形すること

$a > 0$，$b > 0$ のとき，

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a \times \sqrt{b}}{\sqrt{b} \times \sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$$

分母の $\sqrt{b}$ を，分母と分子の両方にかける

問題

次の数の分母を有理化しなさい。

(1) $\dfrac{5}{\sqrt{6}}$

(2) $\dfrac{6}{\sqrt{3}}$

(3) $\dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{18}}$

解答

(1) $\dfrac{5}{\sqrt{6}} = \dfrac{5 \times \sqrt{6}}{\sqrt{6} \times \sqrt{6}}$

$= \mathbf{\dfrac{5\sqrt{6}}{6}}$ **…(答)**

(2) $\dfrac{6}{\sqrt{3}} = \dfrac{6 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}}$

$= \dfrac{6\sqrt{3}}{3}$

$= \mathbf{2\sqrt{3}}$ **…(答)**

(3) $\dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{18}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{9 \times 2}}$

$= \dfrac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{2}}$

$= \dfrac{2\sqrt{5} \times \sqrt{2}}{3\sqrt{2} \times \sqrt{2}}$

$= \dfrac{2\sqrt{10}}{6}$

$= \mathbf{\dfrac{\sqrt{10}}{3}}$ **…(答)**

MEMO

確認テスト 3

次の数の分母を有理化しなさい。

(1) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

(2) $\dfrac{4}{\sqrt{2}}$

(3) $\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{8}}$

例題 4　根号をふくむ式の乗法・除法

問題

次の計算をしなさい。

(1)　$3\sqrt{2} \times 2\sqrt{15}$

(2)　$5\sqrt{14} \times (-2\sqrt{7})$

(3)　$12\sqrt{6} \div 6\sqrt{2}$

ポイント

● 整数をふくむ $\sqrt{}$ のかけ算・わり算 → $\sqrt{}$ の中どうし，$\sqrt{}$ の外どうしでそれぞれ計算

解答

(1)
$$3\sqrt{2} \times 2\sqrt{15} = 3 \times 2 \times \sqrt{2 \times 15}$$
$$= \mathbf{6\sqrt{30}} \quad \cdots\textbf{(答)}$$

(2)
$$5\sqrt{14} \times (-2\sqrt{7}) = 5 \times (-2) \times \sqrt{14} \times \sqrt{7}$$
$$= -10 \times \sqrt{14 \times 7}$$
$$= -10 \times \sqrt{2 \times 7 \times 7}$$
$$= -10 \times \sqrt{7^2 \times 2}$$
$$= -10 \times 7 \times \sqrt{2}$$
$$= \mathbf{-70\sqrt{2}} \quad \cdots\textbf{(答)}$$

(3)
$$12\sqrt{6} \div 6\sqrt{2} = 12\sqrt{6} \times \frac{1}{6\sqrt{2}}$$
$$= \frac{12\sqrt{6}}{6\sqrt{2}}$$
$$= \frac{12}{6} \times \sqrt{\frac{6}{2}}$$
$$= \mathbf{2\sqrt{3}} \quad \cdots\textbf{(答)}$$

MEMO

確認テスト 4

次の計算をしなさい。

(1) $-2\sqrt{3}\times4\sqrt{11}$

(2) $3\sqrt{21}\times2\sqrt{7}$

(3) $-4\sqrt{10}\div2\sqrt{5}$

例題 5 平方根の近似値

問題

$\sqrt{5}=2.236$，$\sqrt{50}=7.071$ として，次の値を求めなさい。

(1) $\sqrt{45}$

(2) $\sqrt{5000}$

(3) $\sqrt{0.5}$

(4) $\dfrac{5}{2\sqrt{5}}$

ポイント

- ある $\sqrt{}$ の値が与えられている計算
  → 与えられた近似値を使って計算するために，$\sqrt{}$ の中の数を整理

解答

(1) $\sqrt{45}=\sqrt{3^2\times5}$
$=3\sqrt{5}$

$\sqrt{5}=2.236$ を代入して
3×2.236
$=$ **6.708**　…(答)

(2) $\sqrt{5000}=\sqrt{100\times50}$
$=10\sqrt{50}$

$\sqrt{50}=7.071$ を代入して
10×7.071
$=$ **70.71**　…(答)

MEMO

(2) $\sqrt{5000}=\sqrt{1000}\times\sqrt{5}$

(3) $\sqrt{0.5} = \sqrt{\dfrac{50}{100}}$

$= \dfrac{\sqrt{50}}{10}$

$\sqrt{50} = 7.071$ を代入して

$\dfrac{7.071}{10} = \mathbf{0.7071}$　…(答)

(4) $\dfrac{5}{2\sqrt{5}} = \dfrac{5 \times \sqrt{5}}{2\sqrt{5} \times \sqrt{5}}$

$= \dfrac{5\sqrt{5}}{10}$

$= \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

$\sqrt{5} = 2.236$ を代入して

$\dfrac{2.236}{2} = \mathbf{1.118}$　…(答)

(3) $\sqrt{0.5} = \sqrt{\dfrac{5}{10}}$

確認テスト 5

$\sqrt{2} = 1.414$，$\sqrt{20} = 4.472$ として，次の値を求めなさい。

(1) $\sqrt{18}$

(2) $\sqrt{2000}$

(3) $\sqrt{0.02}$

(4) $\dfrac{2}{7\sqrt{2}}$

第 14 講・根号をふくむ式の加法・減法

例題 1　根号をふくむ式の加法・減法①

ポイント

● $a\sqrt{c}+b\sqrt{c}=(a+b)\sqrt{c}$

（例）

$$2\sqrt{6}+3\sqrt{6}=(2+3)\sqrt{6}=5\sqrt{6}$$

$$2x+3x=(2+3)x=5x$$

文字式と同じように計算

問題

次の計算をしなさい。

(1)　$5\sqrt{2}+3\sqrt{2}$

(2)　$7\sqrt{3}-9\sqrt{3}$

(3)　$4\sqrt{6}-3\sqrt{5}+8\sqrt{5}-9\sqrt{6}$

(4)　$2\sqrt{7}-3+\sqrt{7}-1$

解答

(1)　$5\sqrt{2}+3\sqrt{2}=(5+3)\sqrt{2}$

$=\mathbf{8\sqrt{2}}$　**…(答)**

(2)　$7\sqrt{3}-9\sqrt{3}=(7-9)\sqrt{3}$

$=\mathbf{-2\sqrt{3}}$　**…(答)**

(3)　$4\sqrt{6}-3\sqrt{5}+8\sqrt{5}-9\sqrt{6}$

$=4\sqrt{6}-9\sqrt{6}-3\sqrt{5}+8\sqrt{5}$

$=(4-9)\sqrt{6}+(-3+8)\sqrt{5}$

$=\mathbf{-5\sqrt{6}+5\sqrt{5}}$　**…(答)**

MEMO

(4)　$2\sqrt{7}-3+\sqrt{7}-1$

$=2\sqrt{7}+\sqrt{7}-3-1$

$=(2+1)\sqrt{7}-4$

$=\mathbf{3\sqrt{7}-4}$　**…(答)**

確認テスト 1

次の計算をしなさい。

(1)　$4\sqrt{7}+\sqrt{7}$

(2)　$6\sqrt{5}-2\sqrt{5}$

(3)　$4\sqrt{2}-8\sqrt{6}+7\sqrt{6}-3\sqrt{2}$

(4)　$11-\sqrt{3}+4-7\sqrt{3}$

例題 2　根号をふくむ式の加法・減法②

問題

次の計算をしなさい。

(1)　$2\sqrt{3} + \sqrt{48}$

(2)　$4\sqrt{28} - 5\sqrt{24} + 3\sqrt{7} + \sqrt{54}$

ポイント

● $\sqrt{\ }$ の中の数が異なる数のたし算・ひき算 → $\sqrt{\ }$ の中の 2 乗の数をみつけて整理してから計算

（例）　$\sqrt{27} - \sqrt{48}$

$= \sqrt{3^2 \times 3} - \sqrt{4^2 \times 3}$　　3^2, 4^2 を $\sqrt{\ }$ の外に出す

$= 3\underline{\sqrt{3}} - 4\underline{\sqrt{3}}$

解答

(1)　$2\sqrt{3} + \sqrt{48} = 2\sqrt{3} + \sqrt{4^2 \times 3}$

$= 2\sqrt{3} + 4\sqrt{3}$

$= \mathbf{6\sqrt{3}}$　**…(答)**

(2)　$4\sqrt{28} - 5\sqrt{24} + 3\sqrt{7} + \sqrt{54}$

$= 4\sqrt{2^2 \times 7} - 5\sqrt{2^2 \times 6} + 3\sqrt{7} + \sqrt{3^2 \times 6}$

$= 8\sqrt{7} - 10\sqrt{6} + 3\sqrt{7} + 3\sqrt{6}$

$= 8\sqrt{7} + 3\sqrt{7} - 10\sqrt{6} + 3\sqrt{6}$

$= \mathbf{11\sqrt{7} - 7\sqrt{6}}$　**…(答)**

MEMO

確認テスト 2

次の計算をしなさい。

(1)　$\sqrt{20} - 3\sqrt{5}$

(2)　$3\sqrt{6} + \sqrt{72} - 2\sqrt{24} - 4\sqrt{2}$

例題 3　根号をふくむ式の加法・減法③

問題

次の計算をしなさい。

(1) $\sqrt{3}+\dfrac{9}{\sqrt{3}}$

(2) $\dfrac{\sqrt{2}}{9}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(3) $\sqrt{\dfrac{3}{2}}-\sqrt{24}$

解答

(1) $\sqrt{3}+\dfrac{9}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}+\dfrac{9\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}$

$=\sqrt{3}+\dfrac{9\sqrt{3}}{3}$

$=\sqrt{3}+3\sqrt{3}$

$=\mathbf{4\sqrt{3}}$ …**(答)**

(2) $\dfrac{\sqrt{2}}{9}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{9}+\dfrac{1\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{9}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$=\dfrac{2\sqrt{2}+9\sqrt{2}}{18}$

$=\mathbf{\dfrac{11\sqrt{2}}{18}}$ …**(答)**

(3) $\sqrt{\dfrac{3}{2}}-\sqrt{24}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-2\sqrt{6}$

$=\dfrac{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}-2\sqrt{6}$

$=\dfrac{\sqrt{6}}{2}-2\sqrt{6}$

$=\dfrac{\sqrt{6}}{2}-\dfrac{4\sqrt{6}}{2}$

$=\mathbf{-\dfrac{3\sqrt{6}}{2}}$ …**(答)**

MEMO

(2) $\dfrac{\sqrt{2}}{9}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

確認テスト 3

次の計算をしなさい。

(1) $\dfrac{4}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}$

(2) $\dfrac{20}{\sqrt{5}}+\dfrac{\sqrt{80}}{8}$

(3) $\sqrt{40}-\sqrt{\dfrac{2}{5}}$

第15講・根号をふくむ式の計算

例題 1　根号をふくむ式の四則計算

問題

次の計算をしなさい。

(1) $\dfrac{15}{\sqrt{3}} - \sqrt{18} \times \sqrt{6}$

(2) $\dfrac{5}{2\sqrt{5}} + \sqrt{55} \div 3\sqrt{11}$

解答

(1) $\dfrac{15}{\sqrt{3}} - \sqrt{18} \times \sqrt{6} = \dfrac{15 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} - 3\sqrt{2} \times \sqrt{6}$

$= \dfrac{15\sqrt{3}}{3} - 3\sqrt{12}$

$= 5\sqrt{3} - 3\sqrt{2^2 \times 3}$

$= 5\sqrt{3} - 6\sqrt{3}$

$= \boldsymbol{-\sqrt{3}}$　**…(答)**

(2) $\dfrac{5}{2\sqrt{5}} + \sqrt{55} \div 3\sqrt{11} = \dfrac{5 \times \sqrt{5}}{2\sqrt{5} \times \sqrt{5}} + \sqrt{55} \times \dfrac{1}{3\sqrt{11}}$

$= \dfrac{5\sqrt{5}}{10} + \dfrac{\sqrt{5}}{3}$

$= \dfrac{\sqrt{5}}{2} + \dfrac{\sqrt{5}}{3}$

$= \dfrac{3\sqrt{5}}{6} + \dfrac{2\sqrt{5}}{6}$

$= \boldsymbol{\dfrac{5\sqrt{5}}{6}}$　**…(答)**

MEMO

確認テスト 1

次の計算をしなさい。

(1) $\dfrac{20}{\sqrt{5}} + \sqrt{60} \times \sqrt{3}$

(2) $\sqrt{42} \div \sqrt{6} - \dfrac{14}{\sqrt{7}}$

例題 2　式の展開の利用

問題

次の計算をしなさい。

(1) $\sqrt{3}(2-\sqrt{3})$

(2) $(1+\sqrt{5})(3+2\sqrt{5})$

(3) $(\sqrt{7}+\sqrt{2})^2$

(4) $(\sqrt{11}+4)(\sqrt{11}-4)$

解答

(1) $\sqrt{3}(2-\sqrt{3})$

$=\sqrt{3}\times 2-\sqrt{3}\times\sqrt{3}$

$=\mathbf{2\sqrt{3}-3}$ **…(答)**

(2) $(1+\sqrt{5})(3+2\sqrt{5})$

$=1\times 3+1\times 2\sqrt{5}+\sqrt{5}\times 3+\sqrt{5}\times 2\sqrt{5}$

$=3+2\sqrt{5}+3\sqrt{5}+10$

$=\mathbf{13+5\sqrt{5}}$ **…(答)**

(3) $(\sqrt{7}+\sqrt{2})^2$

$=(\sqrt{7})^2+2\times\sqrt{2}\times\sqrt{7}+(\sqrt{2})^2$

$=7+2\sqrt{14}+2$

$=\mathbf{9+2\sqrt{14}}$ **…(答)**

(4) $(\sqrt{11}+4)(\sqrt{11}-4)$

$=(\sqrt{11})^2-4^2$

$=11-16$

$=\mathbf{-5}$ **…(答)**

MEMO

確認テスト 2

次の計算をしなさい。

(1) $\sqrt{10}(3\sqrt{10}-\sqrt{5})$

(2) $(\sqrt{6}-1)(3\sqrt{6}+4)$

(3) $(\sqrt{7}+2)^2$

(4) $(2\sqrt{2}-1)(2\sqrt{2}-2)$

例題 3 式の値

問題

次の問いに答えなさい。

(1) $x=1+\sqrt{5}$ のとき，x^2+7x-8 の値を求めなさい。

(2) $x=\sqrt{7}+2$，$y=\sqrt{7}-2$ のとき，x^2-y^2 の値を求めなさい。

ポイント

● $\sqrt{\ }$ をふくむ式の値の計算 → 式を整理してから，かっこをつけて $\sqrt{\ }$ の式を代入

解答

(1) x^2+7x-8

$=(x-1)(x+8)$

$=\{(1+\sqrt{5})-1\}\{(1+\sqrt{5})+8\}$

$=\sqrt{5}(9+\sqrt{5})$

$=\mathbf{9\sqrt{5}+5}$　**…(答)**

MEMO

⑵　$x^2 - y^2$

$= (x + y)(x - y)$

$= \{(\sqrt{7} + 2) + (\sqrt{7} - 2)\}\{(\sqrt{7} + 2) - (\sqrt{7} - 2)\}$

$= (\sqrt{7} + 2 + \sqrt{7} - 2)(\sqrt{7} + 2 - \sqrt{7} + 2)$

$= 2\sqrt{7} \times 4$

$= \mathbf{8\sqrt{7}}$　**…(答)**

確認テスト 3

次の問いに答えなさい。

⑴　$x = \sqrt{6} - 1$ のとき，$x^2 + 2x - 15$ の値を求めなさい。

⑵　$x = 2\sqrt{3} + 2$，$y = 2\sqrt{3} - 2$ のとき，$x^2 - y^2$ の値を求めなさい。

[メモ]

第16講・2次方程式

例題1　2次方程式

ポイント

● 2次方程式 ： $ax^2+bx+c=0$ $(a \neq 0)$ の形に整理できる方程式。
2次方程式を成り立たせる x の値を，2次方程式の解(かい)という。
2次方程式の解をすべて求めることを，2次方程式を解(と)くという。

● ある値が2次方程式の解であるかどうかの判定 ： x に値を代入して方程式が成り立つか調べる

問題

次の問いに答えなさい。

(1) 次の方程式のうち，2次方程式を**すべて**選びなさい。
ア　$x^2+5x=0$　　イ　$x^2-4x+1=x^2-2$　　ウ　$6x-7=0$　　エ　$x^2=16$

(2) -2，-1，0，1，2 のうち，2次方程式 $x^2-x-2=0$ の解を**すべて**答えなさい。

解答

(1) イを整理すると
$$-4x+3=0$$
エを整理すると
$$x^2-16=0$$
となる。よって
ア，エ　…(答)

MEMO

⑵　方程式 $x^2-x-2=0$ の左辺に $x=-2$，-1，0，1，2 をそれぞれ代入すると，$x=-2$ のとき

$$x^2-x-2=(-2)^2-(-2)-2=4$$

$x=-1$ のとき

$$x^2-x-2=(-1)^2-(-1)-2=0$$

$x=0$ のとき

$$x^2-x-2=0^2-0-2=-2$$

$x=1$ のとき

$$x^2-x-2=1^2-1-2=-2$$

$x=2$ のとき

$$x^2-x-2=2^2-2-2=0$$

よって

$x=\mathbf{-1,\ 2}$　…**(答)**

確認テスト 1

次の問いに答えなさい。

⑴　次の方程式のうち，2 次方程式を**すべて**選びなさい。

ア　$x^2-12=2x^2-3x$　　イ　$(x-1)^2=x^2-5$

ウ　$(x+2)(x+3)=0$　　エ　$4x=12$

⑵　-1，0，1，2，3 のうち，2 次方程式 $x^2-3x=0$ の解を**すべて**答えなさい。

第17講・２次方程式の解き方

例題 1　平方根を利用する解き方①

問題

次の方程式を解きなさい。

(1)　$x^2 = 16$

(2)　$2x^2 = 12$

(3)　$x^2 - 18 = 0$

(4)　$25x^2 - 9 = 0$

ポイント

● $x^2 = k$ $(k > 0)$ の形をした２次方程式
　→ 両辺の**平方根**を考えると，$x = \pm\sqrt{k}$ と変形できる。

解答

(1)　$x = \pm 4$　…(答)

(2)　$2x^2 = 12$
　$x^2 = 6$
　$x = \pm\sqrt{6}$　…(答)

(3)　$x^2 - 18 = 0$
　$x^2 = 18$
　$x = \pm 3\sqrt{2}$　…(答)

(4)　$25x^2 - 9 = 0$
　$25x^2 = 9$
　$x^2 = \frac{9}{25}$
　$x = \pm\frac{3}{5}$　…(答)

MEMO

確認テスト 1

次の方程式を解きなさい。

(1) $x^2 = 1$

(2) $3x^2 = 6$

(3) $5x^2 - 80 = 0$

(4) $4x^2 - 3 = 0$

例題 2 平方根を利用する解き方②

問題

次の方程式を解きなさい。

(1) $(x - 6)^2 = 4$

(2) $(x + 3)^2 - 2 = 0$

(3) $2(x - 6)^2 = 98$

ポイント

● $(x + m)^2 = n$ $(n > 0)$ の形をした 2 次方程式

→ かっこの中をひとまとまりとみて，両辺の平方根を考えると，$x + m = \pm\sqrt{n}$ と変形できる。

解答

(1) $(x - 6)^2 = 4$

$x - 6 = \pm 2$

$x = 6 \pm 2$

$x = \mathbf{4, 8}$ **・・・(答)**

(2) $(x + 3)^2 - 2 = 0$

$(x + 3)^2 = 2$

$x + 3 = \pm\sqrt{2}$

$x = \mathbf{-3 \pm \sqrt{2}}$ **・・・(答)**

MEMO

(3) $2(x-6)^2 = 98$

$(x-6)^2 = 49$

$x - 6 = \pm 7$

$x = 6 \pm 7$

$x = \mathbf{-1,\ 13}$　**…(答)**

確認テスト 2

次の方程式を解きなさい。

(1) $(x+3)^2 = 25$

(2) $(x-5)^2 - 3 = 0$

(3) $3(x+4)^2 - 300 = 0$

例題 3　解の公式を利用する解き方

ポイント

● 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解は

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

計算のしくみ

$$2x^2 + 5x + 1 = 0$$
$$x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{1}{2} = 0$$
$$x^2 + \frac{5}{2}x = -\frac{1}{2}$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$
$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$
$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

両辺に x の係数の $\frac{1}{2}$ の 2 乗を加える。

$$x^2 + \frac{5}{2}x + \left(\frac{5}{4}\right)^2 = -\frac{1}{2} + \left(\frac{5}{4}\right)^2$$
$$\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{17}{16}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$
$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

両辺の平方根をとる。

$$x + \frac{5}{4} = \pm\frac{\sqrt{17}}{4}$$
$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{17}}{4}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

問題

次の方程式を解きなさい。

(1) $x^2 + 3x - 2 = 0$

(2) $2x^2 + 3x - 4 = 0$

(3) $6x^2 + 7x - 3 = 0$

(4) $x^2 - 8x + 4 = 0$

解答

(1) 解の公式より

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times 1 \times (-2)}}{2 \times 1}$$
$$= \frac{-3 \pm \sqrt{9+8}}{2}$$
$$= \boldsymbol{\frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}} \quad \cdots\textbf{(答)}$$

(2) 解の公式より

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times 2 \times (-4)}}{2 \times 2}$$
$$= \frac{-3 \pm \sqrt{9+32}}{4}$$
$$= \boldsymbol{\frac{-3 \pm \sqrt{41}}{4}} \quad \cdots\textbf{(答)}$$

(3) 解の公式より

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \times 6 \times (-3)}}{2 \times 6}$$
$$= \frac{-7 \pm \sqrt{121}}{12}$$
$$= \frac{-7 \pm 11}{12}$$
$$= \boldsymbol{-\frac{3}{2},\ \frac{1}{3}} \quad \cdots\textbf{(答)}$$

(4) 解の公式より

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \times 1 \times 4}}{2 \times 1}$$
$$= \frac{8 \pm \sqrt{48}}{2}$$
$$= \frac{8 \pm 4\sqrt{3}}{2}$$
$$= \boldsymbol{4 \pm 2\sqrt{3}} \quad \cdots\textbf{(答)}$$

MEMO

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$a =$ 　　$b =$ 　　$c =$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$a =$ 　　$b =$ 　　$c =$

確認テスト 3

次の方程式を解きなさい。

(1) $x^2 - x - 3 = 0$

(2) $3x^2 - 5x + 1 = 0$

(3) $7x^2 + x - 6 = 0$

(4) $3x^2 + 4x - 8 = 0$

例題 4 因数分解を利用する解き方

ポイント

● 2 次方程式 $(x - a)(x - b) = 0$ $(a \fallingdotseq b)$ の解は

$x = a, b$

計算のしくみ

$(x - a)(x - b) = 0 \rightarrow x - a = 0$ または $x - b = 0$

よって，$x = a$ または $x = b$

問題

次の方程式を解きなさい。

(1) $(x + 1)(x - 6) = 0$

(2) $x^2 - 3x + 2 = 0$

(3) $x^2 - 6x = 0$

(4) $x^2 + 2x + 1 = 0$

解答

(1) $x = \mathbf{-1, 6}$ …(答)

(2) $(x - 1)(x - 2) = 0$

$x = \mathbf{1, 2}$ …(答)

(3) $x(x - 6) = 0$

$x = \mathbf{0, 6}$ …(答)

MEMO

(4)　$(x+1)^2=0$

$x=\mathbf{-1}$　**…(答)**

確認テスト 4

次の方程式を解きなさい。

(1)　$(x-2)(x+4)=0$

(2)　$x^2-x-56=0$

(3)　$2x^2-x=0$

(4)　$x^2-6x+9=0$

例題 5　いろいろな 2 次方程式

ポイント

● 2 次方程式の解き方

1　因数分解を利用する

2　$(x+m)^2=n$ の形に変形する

3　解の公式を利用する

問題

次の方程式を解きなさい。

(1)　$-x^2-11x-30=0$

(2)　$2x^2-8x+2=0$

(3)　$(5x+3)^2=12$

(4)　$(x+1)(x+5)=-4$

解答

MEMO

(1)
$$-x^2 - 11x - 30 = 0$$
$$x^2 + 11x + 30 = 0$$
$$(x+5)(x+6) = 0$$
$$x = \mathbf{-5,\ -6}$$ …(答)

(2)
$$2x^2 - 8x + 2 = 0$$
$$x^2 - 4x + 1 = 0$$

解の公式より

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \times 1 \times 1}}{2 \times 1}$$
$$= \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2}$$
$$= \mathbf{2 \pm \sqrt{3}}$$ …(答)

(3)
$$(5x+3)^2 = 12$$
$$5x + 3 = \pm 2\sqrt{3}$$
$$5x = -3 \pm 2\sqrt{3}$$
$$x = \mathbf{\frac{-3 \pm 2\sqrt{3}}{5}}$$ …(答)

(4)
$$(x+1)(x+5) = -4$$
$$x^2 + 6x + 5 = -4$$
$$x^2 + 6x + 9 = 0$$
$$(x+3)^2 = 0$$
$$x = \mathbf{-3}$$ …(答)

確認テスト 5

次の方程式を解きなさい。

(1) $3x^2 - 15x + 12 = 0$

(2) $4x^2 + 8x - 20 = 0$

(3) $(2x-3)^2 = 5$

(4) $(x-4)(x+4) = -6x$

第 18 講・解が与えられた 2 次方程式

例題 1　解が与えられた 2 次方程式

問題

次の問いに答えなさい。

(1)　2 次方程式 $x^2+ax+8=0$ の解の 1 つが -4 であるとき，a の値ともう 1 つの解を求めなさい。

(2)　2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ の 2 つの解が 5，-3 であるとき，a，b の値を求めなさい。

ポイント

● 解の値を 2 次方程式に代入して，求めたい文字についての方程式を立てる

解答

(1)　$x=-4$ を方程式 $x^2+ax+8=0$ に代入して

$$(-4)^2+a\times(-4)+8=0$$
$$16-4a+8=0$$
$$-4a=-24$$
$$a=\mathbf{6}\quad\cdots(答)$$

よって，与えられた方程式は

$$x^2+6x+8=0$$

であるから，これを解いて

$$(x+2)(x+4)=0$$
$$x=-2,\ -4$$

このうち，$x=-4$ は与えられた解なので，もう 1 つの解は

$$x=\mathbf{-2}\quad\cdots(答)$$

MEMO

⑵　解 $x = 5$，-3 を方程式 $x^2 + ax + b = 0$ にそれぞれ代入して

$$\begin{cases} 5^2 + 5a + b = 0 \\ (-3)^2 + a \times (-3) + b = 0 \end{cases}$$

これを整理すると

$$\begin{cases} 5a + b = -25 & \cdots① \\ -3a + b = -9 & \cdots② \end{cases}$$

① − ② より

$$8a = -16$$
$$a = -2$$

よって，これを①に代入して

$$5 \times (-2) + b = -25$$
$$b = -15$$

以上より

$a = \mathbf{-2}$, $b = \mathbf{-15}$　**…(答)**

確認テスト 1

次の問いに答えなさい。

⑴　2 次方程式 $x^2 + ax - 10 = 0$ の解の 1 つが 5 であるとき，a の値ともう 1 つの解を求めなさい。

⑵　2 次方程式 $x^2 + ax + b = 0$ の 2 つの解が 2，-3 であるとき，a，b の値を求めなさい。

第 19 講・2 次方程式の利用

例題 1　整数に関する問題

問題

ある正の整数を 2 乗した結果は，もとの数の 5 倍より 6 大きくなる。もとの数を求めなさい。

ポイント

● 2 次方程式の文章題の解き方
1　求めたい数を x とおき，方程式を立てる
2　1の 2 次方程式を解く
3　2の解が問題に適しているか確かめる

解答

もとの数を x とおくと，この数を 2 乗した結果は，もとの数の 5 倍より 6 大きくなるので

$$x^2 = 5x + 6$$
$$x^2 - 5x - 6 = 0$$
$$(x + 1)(x - 6) = 0$$
$$x = -1,\ 6$$

x は正の整数なので，$x = -1$ は問題に適していない。
よって

6　…(答)

MEMO

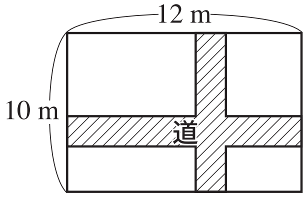
確認テスト 1

ある正の整数を 2 乗した結果は，もとの数の 5 倍より 6 大きくなる。もとの数を求めなさい。

例題 2　面積に関する問題

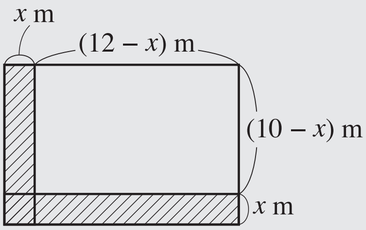
問題

縦が 10 m，横が 12 m の長方形の土地がある。この土地に，右の図のように縦，横，同じ幅の道をつくったところ，道を除いた土地の面積が，もとの土地の面積の $\frac{2}{3}$ になった。このとき，道幅を求めなさい。



ポイント

- 右の図のように道を移動させても，道を除いた土地の面積は変わらない。
- 道幅を x m とすると，道を除いた土地の面積は
  $(12-x)\times(10-x)\ (\mathrm{m}^2)$



解答

道幅を x m とおくと，道を除いた土地の面積は，もとの土地の面積の $\frac{2}{3}$ に等しいので

$$(12-x)(10-x)=\frac{2}{3}\times10\times12$$
$$(x-12)(x-10)=80$$
$$x^2-22x+120=80$$
$$x^2-22x+40=0$$
$$(x-2)(x-20)=0$$
$$x=2,\ 20$$

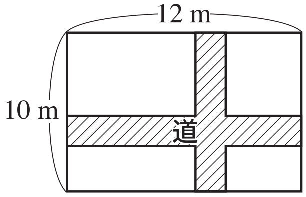
x は道幅なので，$x<10$ である。したがって，$x=20$ は問題に適していない。したがって，求める道幅は

2 m　…(答)

MEMO

確認テスト 2

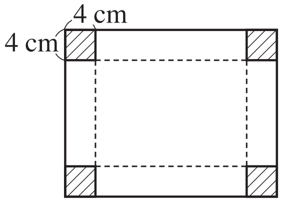
縦が 10 m，横が 12 m の長方形の土地がある。この土地に，右の図のように縦，横，同じ幅の道をつくったところ，道を除いた土地の面積が，もとの土地の面積の $\frac{2}{3}$ になった。このとき，道幅を求めなさい。



例題 3 体積に関する問題

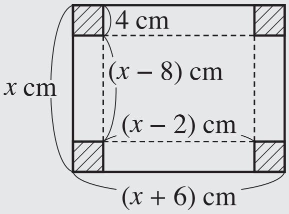
問題

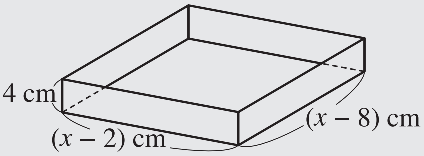
横が縦より 6 cm 長い長方形の厚紙がある。この 4 すみから 1 辺が 4 cm の正方形を切り取り，直方体の容器をつくると，その容積は 2464 cm^3 になる。はじめの厚紙の縦と横の長さを求めなさい。



ポイント

右の図のように，厚紙の縦の長さを x cm とすると，横の長さは $(x+6)$ cm となる。この厚紙を組み立てると，右下の図のような直方体の容器ができる。





解答

厚紙の縦の長さを x cm とすると，横の長さは $(x+6)$ cm である。この厚紙を組み立ててできる直方体の容器について

底面の縦の長さ $(x-8)$ cm,
底面の横の長さ $(x-2)$ cm,
高さ 4 cm

であるから，容積について

$$(x-8)(x-2)\times 4 = 2464$$
$$(x-8)(x-2) = 616$$
$$x^2 - 10x + 16 = 616$$
$$x^2 - 10x - 600 = 0$$
$$(x-30)(x+20) = 0$$
$$x = -20,\ 30$$

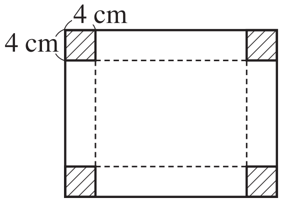
x は厚紙の縦の長さなので，$x = -20$ は問題に適していない。したがって，厚紙の縦と横の長さは

縦 30 cm, 横 36 cm　・・・(答)

MEMO

確認テスト 3

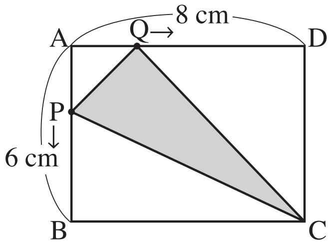
横が縦より 6 cm 長い長方形の厚紙がある。この 4 すみから 1 辺が 4 cm の正方形を切り取り，直方体の容器をつくると，その容積は 2464 cm^3 になる。はじめの厚紙の縦と横の長さを求めなさい。



例題 4　動点に関する問題

問題

右の図のような AB = 6 cm，AD = 8 cm の長方形 ABCD がある。2 点 P，Q は頂点 A を同時に出発し，点 P は辺 AB 上を頂点 B まで，点 Q は辺 AD 上を頂点 D までともに毎秒 1 cm の速さで動く。ただし，点 Q は点 P が頂点 B に着くと停止する。△PCQ の面積が 12 cm^2 になるのは，2 点 P，Q が頂点 A を出発してから何秒後であるか答えなさい。

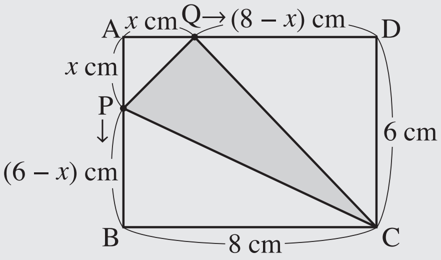


ポイント

● 2 点 P，Q は毎秒 1 cm の速さで移動するので，x 秒後の AP，AQ の長さは

AP = AQ = x cm

となる。よって，各辺の長さは右の図のようになるので，△PCQ の面積を x を用いて表すことができる。



解答

x 秒後の △PCQ の面積は

△PCQ

= (長方形 ABCD) − △APQ − △BCP − △DQC

と計算できる。それぞれの図形の面積は

$$(\text{長方形 ABCD}) = 6 \times 8 = 48\ (\text{cm}^2)$$

$$\triangle\text{APQ} = \frac{1}{2} \times x \times x = \frac{1}{2}x^2\ (\text{cm}^2)$$

$$\triangle\text{BCP} = \frac{1}{2} \times 8 \times (6 - x) = 4(6 - x) = 24 - 4x\ (\text{cm}^2)$$

MEMO

$$\triangle DQC = \frac{1}{2} \times (8 - x) \times 6$$
$$= 3(8 - x)$$
$$= 24 - 3x\ (\mathrm{cm}^2)$$

よって

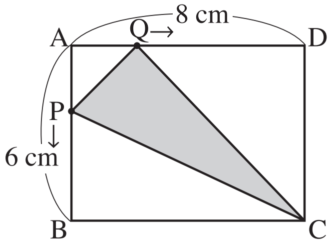
$$12 = 48 - \frac{1}{2}x^2 - (24 - 4x) - (24 - 3x)$$
$$12 = 48 - \frac{1}{2}x^2 - 24 + 4x - 24 + 3x$$
$$\frac{1}{2}x^2 - 7x + 12 = 0$$
$$x^2 - 14x + 24 = 0$$
$$(x - 2)(x - 12) = 0$$
$$x = 2,\ 12$$

AB = 6 cm だから，$x = 12$ は問題に適していない。
よって

2 秒後　…(答)

確認テスト 4

右の図のような AB ＝ 6 cm，AD ＝ 8 cm の長方形 ABCD がある。2 点 P，Q は頂点 A を同時に出発し，点 P は辺 AB 上を頂点 B まで，点 Q は辺 AD 上を頂点 D までともに毎秒 1 cm の速さで動く。ただし，点 Q は点 P が頂点 B に着くと停止する。△PCQ の面積が 12 cm^2 になるのは，2 点 P，Q が頂点 A を出発してから何秒後であるか答えなさい。



第 20 講・関数 $y = ax^2$

例題 1　関数 $y = ax^2$ ①

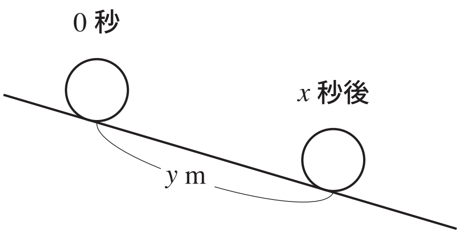
ポイント

● y が x の関数で，$y = ax^2$ の形で表されるとき，y は x の 2 乗に比例するという
ただし，a は 0 でない定数で，この a を比例定数という

（例）$y = 3x^2$ と表されるとき，y は x の 2 乗に比例する。また，比例定数は 3 である

問題

ある斜面で球を転がし，1 秒ごとに転がった距離を次のように記録した。転がり始めてから x 秒間に転がる距離を y m とするとき，次の問いに答えなさい。



x（秒）	0	1	2	3	4
y（m）	0	2	8	18	32

(1)　y が x の 2 乗に比例するとき，y を x の式で表しなさい。
(2)　x の値が 2 倍，3 倍になるとき，対応する y の値はそれぞれ何倍になるか答えなさい。
(3)　転がり始めてから 5 秒間に転がる距離を求めなさい。

解答

(1)　表より
$y = 2x^2$　…(答)

(2)　$x = 1$ のとき $y = 2$ であり，$x = 2$ のとき $y = 8$ であるから，x の値が 2 倍になると，y の値は
4 倍になる　…(答)
また，$x = 3$ のとき $y = 18$ であるから，x の値が 3 倍になると，y の値は
9 倍になる　…(答)

MEMO

(1)

x	0	1	2	3	4
x^2					
y	0	2	8	18	32

(3)　$y = 2x^2$ と表されるから，$x = 5$ を代入すると

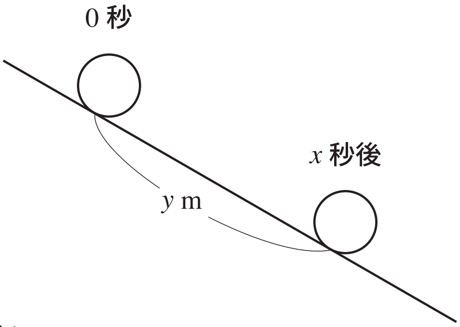
$$y = 2 \times 5^2$$
$$= 50$$

よって

50 m　…(答)

確認テスト 1

ある斜面で球を転がし，1 秒ごとに転がった距離を次のように記録した。転がり始めてから x 秒間に転がる距離を y m とするとき，次の問いに答えなさい。



x（秒）	0	1	2	3	4
y（m）	0	3	12	27	48

(1)　y が x の 2 乗に比例するとき，y を x の式で表しなさい。
(2)　x の値が 4 倍になるとき，対応する y の値は何倍になるか答えなさい。
(3)　転がり始めてから 5 秒間に転がる距離を求めなさい。

例題 2　関数 $y = ax^2$ ②

問題

次のことがらについて，y を x の式で表し，y が x の 2 乗に比例する場合は○，そうでない場合は×と答えなさい。

(1)　1 辺が x cm の正方形の面積を y cm^2 とする。
(2)　1 辺が x cm の立方体の表面積を y cm^2 とする。
(3)　縦が x cm で，横が縦より 3 cm 長い長方形の面積を y cm^2 とする。

ポイント

● y が x の関数で，$y = ax^2$ の式で表されるとき，y は x の 2 乗に比例するという

解答

⑴　1 辺が x cm の正方形の面積は

$x \times x = x^2$（cm^2）

と表せる。よって

$y = \boldsymbol{x^2}$　**・・・(答)**

となり，$y = ax^2$ の式で表されるので

○　・・・(答)

⑵　1 辺が x cm の立方体の表面積は

$x \times x \times 6 = 6x^2$（$\mathrm{cm}^2$）

と表せる。よって

$y = \boldsymbol{6x^2}$　**・・・(答)**

となり，$y = ax^2$ の式で表されるので

○　・・・(答)

⑶　縦の長さは x cm，横の長さは $(x + 3)$ cm だから，長方形の面積は

$x \times (x + 3) = x^2 + 3x$（$\mathrm{cm}^2$）

と表せる。よって

$y = \boldsymbol{x^2 + 3x}$　**・・・(答)**

となり，$y = ax^2$ の式で表されないので

×　・・・(答)

MEMO

確認テスト 2

次のことがらについて，y を x の式で表し，y が x の 2 乗に比例する場合は○，そうでない場合は×と答えなさい。

⑴　底辺が x cm，高さが $3x$ cm の三角形の面積を y cm^2 とする。

⑵　底面の半径が x cm，高さが 4 cm の円柱の体積を y cm^3 とする。

⑶　1 辺が x cm の立方体の体積を y cm^3 とする。

例題 3　関数 $y = ax^2$ の式の求め方

問題

y は x の 2 乗に比例し，$x = 5$ のとき，$y = 75$ である。このとき，次の問いに答えなさい。

⑴　y を x の式で表しなさい。

⑵　$x = 4$ のときの y の値を求めなさい。

⑶　$y = 12$ のときの x の値を求めなさい。

ポイント

● x，y の値の組が与えられたとき，y を x の式で表す
→ 関数を $y = ax^2$ とおき，x，y の値を代入して a の値を求める

● 関数 $y = ax^2$ において，x，y のうち一方の値が与えられたとき，もう一方の値を求める
→ 与えられた x または y の値を代入して，もう一方の値を求める

解答

MEMO

(1)　y は x の 2 乗に比例するから $y = ax^2$ と書くことができる。この式に $x = 5$，$y = 75$ を代入すると

$75 = a \times 5^2$

$75 = 25a$

$a = 3$

よって

$y = \mathbf{3x^2}$　**…(答)**

(2)　$y = 3x^2$ に $x = 4$ を代入すると

$y = 3 \times 4^2$

$= \mathbf{48}$　**…(答)**

(3)　$y = 3x^2$ に $y = 12$ を代入すると

$12 = 3x^2$

$x^2 = 4$

よって

$x = \mathbf{\pm 2}$　**…(答)**

確認テスト 3

y は x の 2 乗に比例し，$x = 3$ のとき，$y = -36$ である。このとき，次の問いに答えなさい。

(1)　y を x の式で表しなさい。

(2)　$x = 5$ のときの y の値を求めなさい。

(3)　$y = -64$ のときの x の値を求めなさい。

第21講・関数 $y = ax^2$ のグラフ

例題1 関数 $y = ax^2$ のグラフ①

問題

次の関数のグラフをかきなさい。

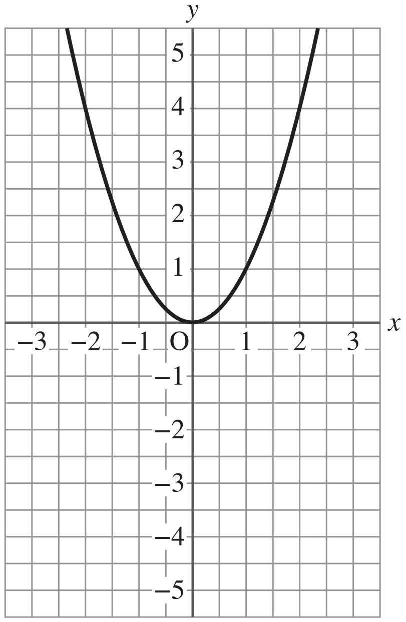
(1) $y = x^2$

(2) $y = \frac{1}{2}x^2$

(3) $y = -x^2$

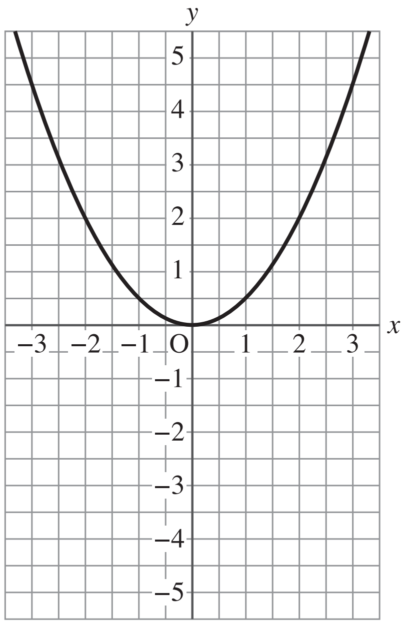
解答

(1)

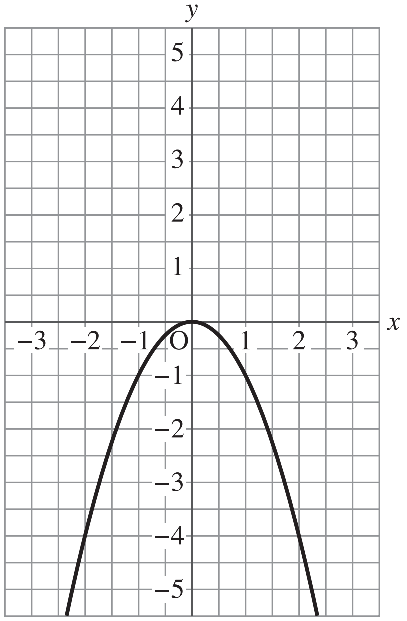


MEMO

(2)



(3)



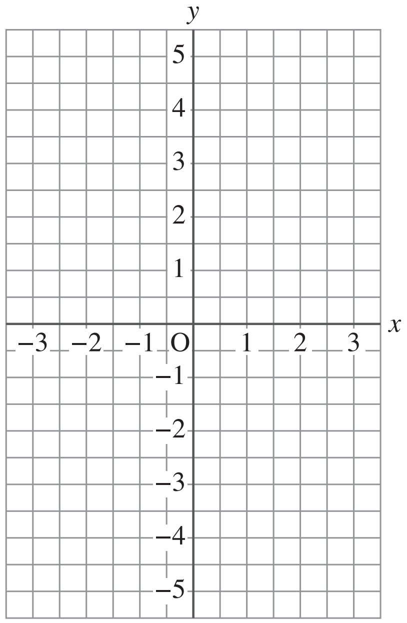
確認テスト 1

次の関数のグラフをかきなさい。

(1)　$y = 2x^2$

(2)　$y = \frac{1}{4}x^2$

(3)　$y = -2x^2$



例題 2　関数 $y = ax^2$ のグラフ②

ポイント

● 関数 $y = ax^2$ のグラフは次のような性質をもつ

1　原点を通る

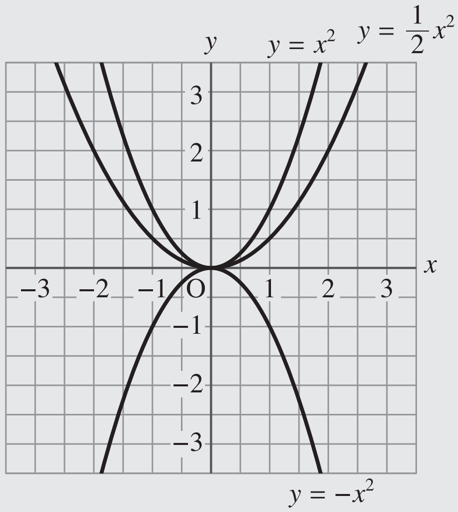
2　y 軸(じく)について対称(たいしょう)な**放物線**(ほうぶつせん)である

3　$a > 0$ のときは上に開いた形，
　　$a < 0$ のときは下に開いた形になる

4　a の絶対値が大きいほど，開き方は小さい

（例）$y = x^2$，$y = \frac{1}{2}x^2$，$y = -x^2$ のグラフは，

　　それぞれ右の図のようになる。



問題

次のそれぞれにあてはまる関数をア～エの中から**すべて**選びなさい。

(1)　グラフが y 軸について対称である

(2)　グラフが上に開いている

(3)　グラフが点 $(2, 2)$ を通る

(4)　グラフの開き方がもっとも小さい

ア　$y = x^2$　　イ　$y = \frac{1}{2}x^2$　　ウ　$y = -\frac{1}{2}x^2$　　エ　$y = 2x^2$

解答

(1)　$y = ax^2$ の形で表せる関数のグラフは必ず y 軸について対称だから

ア，イ，ウ，エ　…(答)

(2)　グラフが上に開いているのは比例定数が正の関数である。よって

ア，イ，エ　…(答)

(3)　ア～エの関数に $x = 2$ を代入し，$y = 2$ となるものを調べる。

ア　$y = 2^2 = 4$

イ　$y = \frac{1}{2} \times 2^2 = 2$

ウ　$y = -\frac{1}{2} \times 2^2 = -2$

エ　$y = 2 \times 2^2 = 8$

よって

イ　…(答)

(4)　グラフの開き方がもっとも小さいのは，比例定数の絶対値がもっとも大きい関数である。それぞれの関数の比例定数は

ア：1　　イ：$\frac{1}{2}$　　ウ：$-\frac{1}{2}$　　エ：2

なので，絶対値がもっとも大きい比例定数は 2。よって

エ　…(答)

MEMO

確認テスト 2

次のそれぞれにあてはまる関数をア～エの中から**すべて**選びなさい。

(1)　グラフが原点を通る
(2)　グラフが下に開いている
(3)　グラフが点 $(-1,\ -2)$ を通る
(4)　グラフの開き方がもっとも大きい

ア　$y = 2x^2$　　イ　$y = -2x^2$　　ウ　$y = 3x^2$　　エ　$y = -\frac{1}{3}x^2$

例題 3　関数 $y = ax^2$ のグラフ③

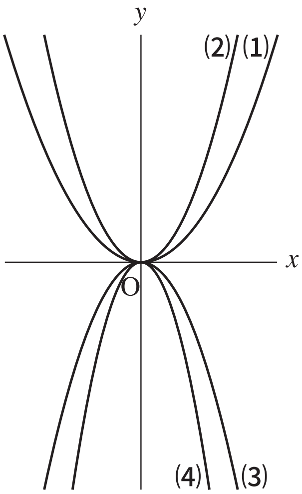
問題

右の図の(1)～(4)は

ア　$y = \frac{1}{2}x^2$　　イ　$y = -x^2$

ウ　$y = -\frac{1}{2}x^2$　　エ　$y = \frac{1}{4}x^2$

のいずれかのグラフを表している。(1)～(4)はそれぞれどの関数のグラフであるか答えなさい。



解答

(1)　上に開いているグラフだから，比例定数は正である。よって，求める関数は

ア　$y = \frac{1}{2}x^2$　　エ　$y = \frac{1}{4}x^2$

のいずれかである。また，(1)のグラフは(2)のグラフに比べて開き方が大きいので，比例定数の絶対値は小さい。よって

エ　$y = \frac{1}{4}x^2$　…(答)

MEMO

⑵　⑴より，上に開いているグラフはアとエのいずれかで，⑵のグラフはこのうち開き方が小さい方だから

ア　$y = \frac{1}{2}x^2$　…(答)

⑶　下に開いているグラフだから，比例定数は負である。よって，求める関数は

イ　$y = -x^2$　　ウ　$y = -\frac{1}{2}x^2$

のいずれかである。また，⑶のグラフは⑷のグラフに比べて開き方が大きいので，比例定数の絶対値は小さい。よって

ウ　$y = -\frac{1}{2}x^2$　…(答)

⑷　⑶より，下に開いているグラフはイとウのいずれかで，⑷のグラフはこのうち開き方が小さい方だから

イ　$y = -x^2$　…(答)

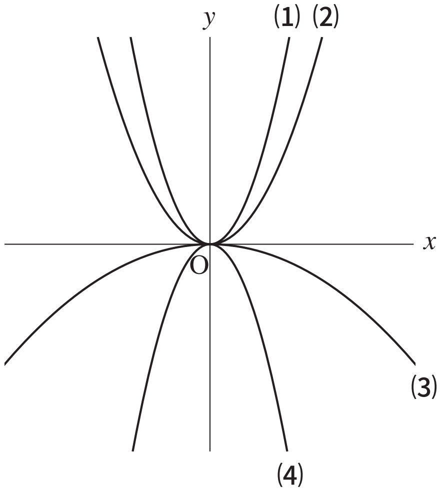
確認テスト 3

右の図の⑴～⑷は

ア　$y = x^2$　　イ　$y = -2x^2$

ウ　$y = 2x^2$　　エ　$y = -\frac{1}{6}x^2$

のいずれかのグラフを表している。⑴～⑷はそれぞれどの関数のグラフであるか答えなさい。



第 22 講・関数 $y = ax^2$ の値の変化

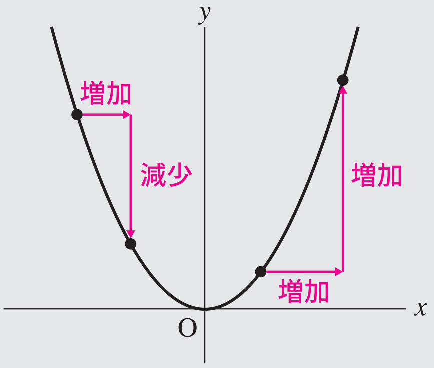
例題 1　関数 $y = ax^2$ の変化の割合①

ポイント

● 関数 $y = ax^2$ の変化の割合は**一定ではない**
変化の割合は次のように計算できる

$$（変化の割合）= \frac{（y \text{ の増加量}）}{（x \text{ の増加量}）}$$

（例）関数 $y = x^2$ の値は右の図のように変化する



問題

次の問いに答えなさい。

(1)　関数 $y = 3x^2$ について，x の値が 2 から 5 まで増加するときの変化の割合を求めなさい。
(2)　関数 $y = 2x^2$ について，x の値が -1 から 3 まで増加するときの変化の割合を求めなさい。
(3)　関数 $y = -x^2$ について，x の値が -6 から -2 まで増加するときの変化の割合を求めなさい。

解答

(1)　$x = 2$ のとき

$y = 3 \times 2^2$
$= 12$

$x = 5$ のとき

$y = 3 \times 5^2$
$= 75$

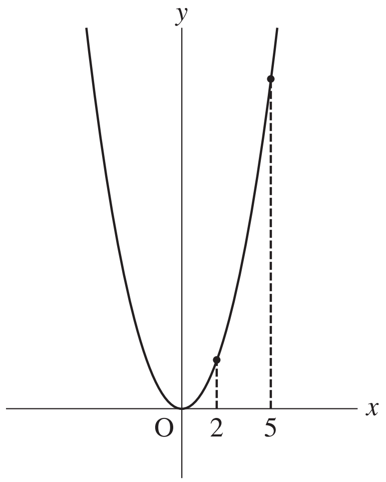
したがって，変化の割合は

$$\frac{75 - 12}{5 - 2} = \frac{63}{3}$$

$= \mathbf{21}$　…（答）

MEMO

(1)



(2)　$x = -1$ のとき

$y = 2 \times (-1)^2$

$= 2$

$x = 3$ のとき

$y = 2 \times 3^2$

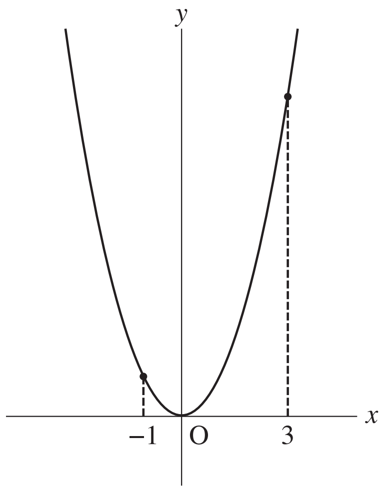
$= 18$

したがって，変化の割合は

$\dfrac{18 - 2}{3 - (-1)} = \dfrac{16}{4}$

$= \mathbf{4}$　**…(答)**

(2)



(3)　$x = -6$ のとき

$y = -1 \times (-6)^2$

$= -36$

$x = -2$ のとき

$y = -1 \times (-2)^2$

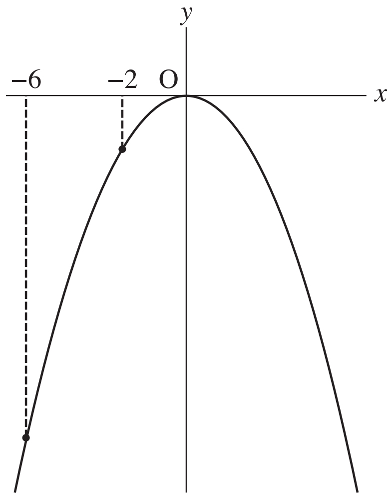
$= -4$

したがって，変化の割合は

$\dfrac{-4 - (-36)}{-2 - (-6)} = \dfrac{32}{4}$

$= \mathbf{8}$　**…(答)**

(3)



確認テスト 1

次の問いに答えなさい。

(1)　関数 $y = 2x^2$ について，x の値が 1 から 7 まで増加するときの変化の割合を求めなさい。

(2)　関数 $y = x^2$ について，x の値が -4 から -2 まで増加するときの変化の割合を求めなさい。

(3)　関数 $y = -3x^2$ について，x の値が -5 から 4 まで増加するときの変化の割合を求めなさい。

例題 2　関数 $y = ax^2$ の変化の割合②

問題

次の問いに答えなさい。

(1)　関数 $y = ax^2$ で，x が 2 から 3 まで増加するときの変化の割合が 10 であるとき，a の値を求めなさい。

(2)　2 つの関数 $y = ax^2$ と $y = 3x + 2$ で，x の値が -1 から 7 まで増加するときの変化の割合が等しいとき，a の値を求めなさい。

(3)　関数 $y = -\frac{1}{3}x^2$ で，x の値が a から $a + 3$ まで増加するときの変化の割合が 5 であるとき，a の値を求めなさい。

解答

(1)　$x = 2$ のとき

$$y = a \times 2^2$$
$$= 4a$$

$x = 3$ のとき

$$y = a \times 3^2$$
$$= 9a$$

したがって，変化の割合は

$$\frac{9a - 4a}{3 - 2} = 5a$$

このときの変化の割合は 10 なので

$$5a = 10$$
$$a = \mathbf{2}$$　…(答)

MEMO

⑵　関数 $y=ax^2$ で，$x=-1$ のとき

$$y=a\times(-1)^2$$
$$=a$$

$x=7$ のとき

$$y=a\times7^2$$
$$=49a$$

したがって，変化の割合は

$$\frac{49a-a}{7-(-1)}=\frac{48a}{8}$$
$$=6a$$

関数 $y=3x+2$ の変化の割合は 3 で一定なので

$$6a=3$$
$$a=\mathbf{\frac{1}{2}}\quad\cdots\text{(答)}$$

⑶　$x=a$ のとき

$$y=-\frac{1}{3}\times a^2$$
$$=-\frac{a^2}{3}$$

$x=a+3$ のとき

$$y=-\frac{1}{3}\times(a+3)^2$$
$$=\frac{-a^2-6a-9}{3}$$

よって，y の増加量は

$$\frac{-a^2-6a-9}{3}-\left(-\frac{a^2}{3}\right)=\frac{-6a-9}{3}$$
$$=-2a-3$$

したがって，変化の割合は

$$\frac{-2a-3}{(a+3)-a}=\frac{-2a-3}{3}$$

このときの変化の割合は 5 なので

$$\frac{-2a-3}{3}=5$$
$$-2a-3=15$$
$$-2a=18$$
$$a=\mathbf{-9}\quad\cdots\text{(答)}$$

確認テスト 2

次の問いに答えなさい。

(1) 関数 $y = ax^2$ で，x が -2 から 5 まで増加するときの変化の割合が 9 であるとき，a の値を求めなさい。

(2) 2 つの関数 $y = ax^2$ と $y = -4x - 5$ で，x の値が -8 から 2 まで増加するときの変化の割合が等しいとき，a の値を求めなさい。

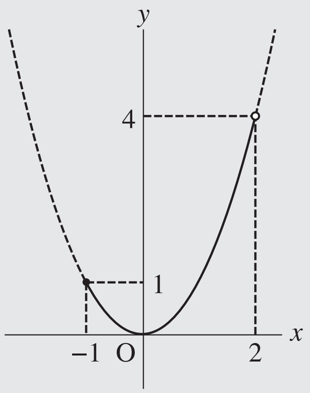
(3) 関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ で，x の値が $a - 2$ から a まで増加するときの変化の割合が -4 であるとき，a の値を求めなさい。

例題 3　関数 $y = ax^2$ の変域①

ポイント

● 関数 $y = ax^2$ の変域 → グラフをかいて考える
ふくむ点は●，ふくまない点は○
で表す

（例）$y = x^2$ において，x の変域が $-1 \leqq x < 2$ のときのグラフは右の図のようになるので，y の変域は $0 \leqq y < 4$ である



問題

関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ について，x の変域が次のとき，y の変域を求めなさい。

(1) $2 \leqq x \leqq 3$

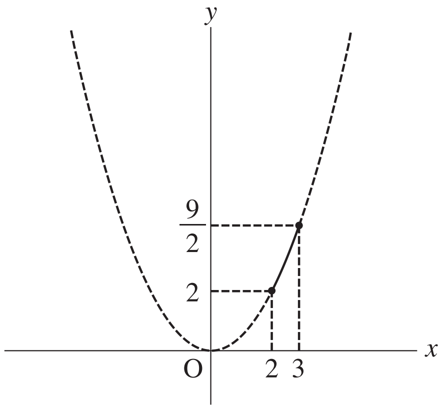
(2) $-4 \leqq x < -2$

(3) $-2 < x \leqq 4$

解答

MEMO

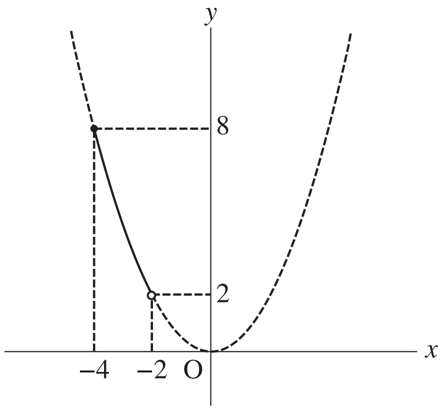
⑴　グラフは下の図のようになる。



$x = 2$ のとき $y = 2$，$x = 3$ のとき $y = \frac{9}{2}$ だから

$\mathbf{2 \leqq y \leqq \frac{9}{2}}$　**…(答)**

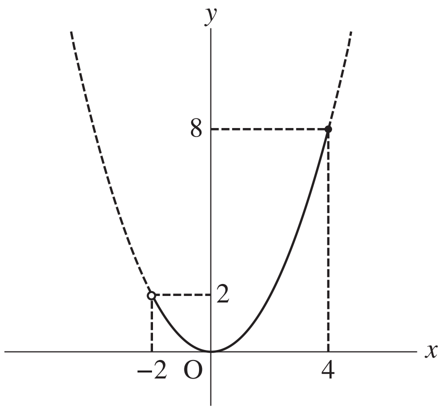
⑵　グラフは下の図のようになる。



$x = -2$ のとき $y = 2$，$x = -4$ のとき $y = 8$ だから

$\mathbf{2 < y \leqq 8}$　**…(答)**

(3)　グラフは下の図のようになる。



$x = 0$ のとき $y = 0$，$x = 4$ のとき $y = 8$ だから

$0 \leqq y \leqq 8$　…(答)

確認テスト 3

関数 $y = -2x^2$ について，x の変域が次のとき，y の変域を求めなさい。

(1)　$1 \leqq x < 3$

(2)　$-5 \leqq x \leqq -1$

(3)　$-3 < x \leqq 2$

例題 4　関数 $y = ax^2$ の変域②

問題

次の問いに答えなさい。

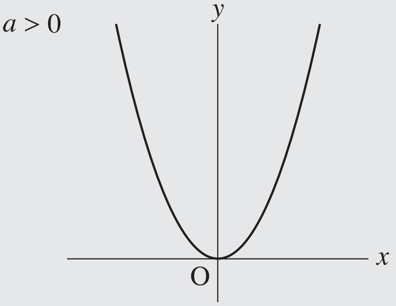
(1)　関数 $y = ax^2$ で，x の変域が $-1 \leqq x \leqq 2$ のとき，y の変域が $0 \leqq y \leqq 8$ となる。このとき，a の値を求めなさい。

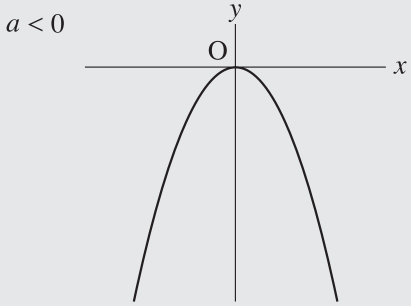
(2)　関数 $y = ax^2$ で，x の変域が $-1 \leqq x \leqq 4$ のとき，y の変域が $-8 \leqq y \leqq 0$ となる。このとき，a の値を求めなさい。

ポイント

● 関数 $y = ax^2$ について，変域から a の値を求める問題

1 y の値から a の符号を判定する
y が正の値をとるとき，a の値も正であり，
y が負の値をとるとき，a の値も負である



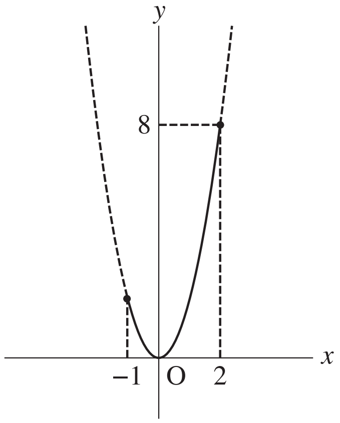


2 関数 $y = ax^2$ のグラフをかき，グラフ上にある点の座標を求める

解答

MEMO

(1) y は正の値をとるから，a の値は正である。よって，グラフは下の図のようになる。



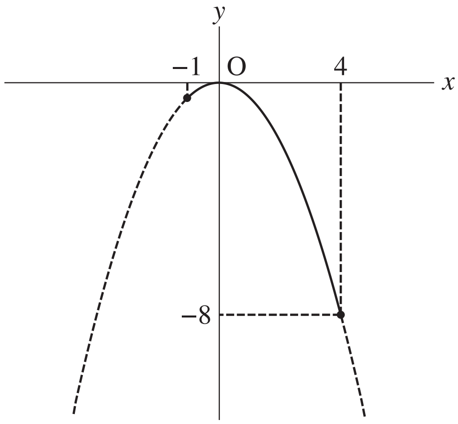
関数 $y = ax^2$ のグラフは点 $(2, 8)$ を通るので，
$x = 2$，$y = 8$ を代入すると

$8 = a \times 2^2$

$8 = 4a$

$a = \mathbf{2}$　**…(答)**

⑵　y は負の値をとるから，a の値は負である。よって，グラフは下の図のようになる。



関数 $y = ax^2$ のグラフは点 $(4，-8)$ を通るので，
$x = 4$，$y = -8$ を代入すると

$$-8 = a \times 4^2$$

$$-8 = 16a$$

$$a = -\frac{1}{2}$$ …(答)

確認テスト 4

次の問いに答えなさい。

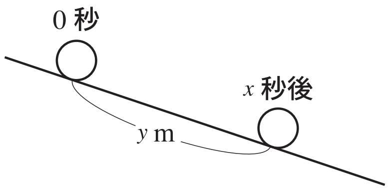
⑴　関数 $y = ax^2$ で，x の変域が $-2 \leqq x \leqq 3$ のとき，y の変域が $0 \leqq y \leqq 6$ となる。このとき，a の値を求めなさい。

⑵　関数 $y = ax^2$ で，x の変域が $-4 \leqq x \leqq 2$ のとき，y の変域が $-10 \leqq y \leqq 0$ となる。このとき，a の値を求めなさい。

例題 5　平均の速さ

問題

ある斜面でボールを転がしたとき，転がりはじめてから x 秒間に進む距離を y m とすると，$y = 3x^2$ という関係がある。次の問いに答えなさい。



(1)　転がりはじめて，1 秒後から 6 秒後までの間に，ボールは何 m 進んだか。
(2)　転がりはじめて，1 秒後から 6 秒後までの間の平均の速さを求めなさい。
(3)　転がりはじめてから 5 秒後までの平均の速さを求めなさい。

ポイント

● 平均の速さは次のように求めることができる

$$（平均の速さ）= \frac{（進んだ距離）}{（進んだ時間）}$$

解答

(1)　$x = 1$ のとき

$y = 3 \times 1^2$
$= 3$

$x = 6$ のとき

$y = 3 \times 6^2$
$= 108$

よって，進んだ距離は

$108 - 3 =$ **105（m）**　…(答)

(2)　進んだ時間は

$6 - 1 = 5$（秒）

だから，平均の速さは

$\frac{105}{5} = 21$（m/s）

よって

秒速 21 m　…(答)

MEMO

(3)　$x = 5$ のとき

$$y = 3 \times 5^2$$
$$= 75$$

だから，平均の速さは

$$\frac{75 - 0}{5 - 0} = 15 \text{ (m/s)}$$

よって

秒速 15 m　…(答)

確認テスト 5

高い場所からボールを落下させるとき，落下しはじめてから x 秒間に落ちる距離を y m とすると，$y = 4.9x^2$ という関係がある。次の問いに答えなさい。

(1)　落下しはじめて，2 秒後から 4 秒後までの間に，ボールは何 m 落ちたか。

(2)　落下しはじめて，2 秒後から 4 秒後までの間の平均の速さを求めなさい。

(3)　落下しはじめてから 3 秒後までの平均の速さを求めなさい。

第 23 講・関数 $y = ax^2$ の利用

例題 1　振り子の問題

問題

周期が x 秒の振り子の長さを y m とすると，およそ $y = \frac{1}{4}x^2$ の関係がある。このとき，次の問いに答えなさい。

(1)　周期が 10 秒の振り子の長さは何 m か求めなさい。

(2)　100 m の振り子の周期は何秒か求めなさい。

(3)　振り子の長さを 4 m から 9 m にすると，振り子の周期は何秒長くなるか求めなさい。

解答

(1)　$y = \frac{1}{4}x^2$ に $x = 10$ を代入すると

$$y = \frac{1}{4} \times 10^2$$
$$= 25$$

よって，振り子の長さは

25 m　…(答)

(2)　$y = \frac{1}{4}x^2$ に $y = 100$ を代入すると

$$100 = \frac{1}{4}x^2$$
$$x^2 = 400$$

$x > 0$ なので

$$x = 20$$

よって，振り子の周期は

20 秒　…(答)

MEMO

⑶　$y = 4$ のとき

$$4 = \frac{1}{4}x^2$$

$$x^2 = 16$$

$x > 0$ なので

$$x = 4$$

だから，長さ 4 m の振り子の周期は 4 秒である。

一方，$y = 9$ のとき

$$9 = \frac{1}{4}x^2$$

$$x^2 = 36$$

$x > 0$ なので

$$x = 6$$

だから，長さ 9 m の振り子の周期は 6 秒である。よって，振り子の周期の差は

$6 - 4 =$ **2（秒）**　…（答）

確認テスト 1

周期が x 秒の振り子の長さを y m とすると，およそ $y = \frac{1}{4}x^2$ の関係がある。このとき，次の問いに答えなさい。

⑴　周期が 10 秒の振り子の長さは何 m か求めなさい。

⑵　100 m の振り子の周期は何秒か求めなさい。

⑶　振り子の長さを 4 m から 9 m にすると，振り子の周期は何秒長くなるか求めなさい。

例題 2　制動距離の問題

問題

自動車の制動距離は，速さの 2 乗に比例する。ある自動車が時速 40 km で走っているときの制動距離は 10 m である。時速 x km で走っているときの制動距離を y m として，次の問いに答えなさい。

⑴　y を x の式で表しなさい。

⑵　時速 60 km で走っているときの制動距離は何 m か求めなさい。

⑶　制動距離が 90 m になるのは，時速何 km で走るときか求めなさい。

解答

MEMO

⑴　制動距離は速さの 2 乗に比例するので，$y = ax^2$ と表すことができる。これに $x = 40$，$y = 10$ を代入すると

$$10 = a \times 40^2$$
$$a = \frac{1}{160}$$

よって

$$y = \frac{1}{160}x^2$$ …(答)

⑵　$y = \frac{1}{160}x^2$ に $x = 60$ を代入すると

$$y = \frac{1}{160} \times 60^2$$
$$= \frac{45}{2}$$

よって，求める制動距離は

$\frac{45}{2}$ m　…(答)

⑶　$y = \frac{1}{160}x^2$ に $y = 90$ を代入すると

$$90 = \frac{1}{160}x^2$$
$$x^2 = 14400$$

$x > 0$ だから

$$x = 120$$

よって，求める速さは

時速 120 km　…(答)

確認テスト 2

自動車の制動距離は，速さの 2 乗に比例する。ある自動車が時速 40 km で走っているときの制動距離は 10 m である。時速 x km で走っているときの制動距離を y m として，次の問いに答えなさい。

⑴　y を x の式で表しなさい。

⑵　時速 60 km で走っているときの制動距離は何 m か求めなさい。

⑶　制動距離が 90 m になるのは，時速何 km で走るときか求めなさい。

例題 3　移動に関する問題

問題

ある坂の上に並んで立っている A さんと B さんは，同時に坂を下り始めた。A さんはローラースケートをはいてすべり下り，B さんは秒速 1 m の速さで歩いて坂を下りた。A さんが坂を下り始めてから x 秒間に進む距離を y m とすると，$y = \frac{1}{4}x^2$ という関係が成り立つとき，次の問いに答えなさい。

(1)　A さんと B さんがそれぞれ進む様子を表すグラフをかきなさい。

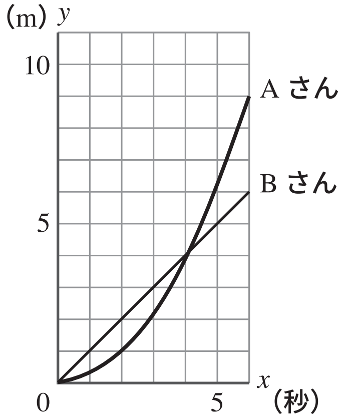
(2)　A さんが B さんに追いつくのは，2 人が坂を下り始めてから何秒後か求めなさい。

解答

(1)　B さんが x 秒間に進む距離を y m とすると，B さんの歩く速さは秒速 1 m だから

$$y = x$$

と表すことができる。よって，グラフは次の図のようになる。



(2)　(1)のグラフの交点の座標を読み取ると (4，4) だから

4 秒後　…(答)

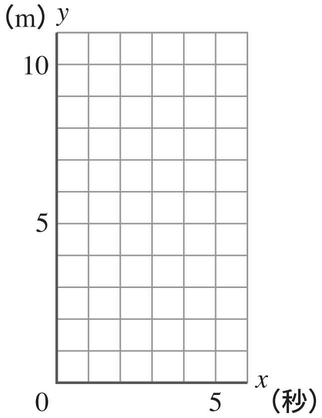
MEMO

確認テスト 3

ある坂の上に並んで立っている A さんと B さんは，同時に坂を下り始めた。A さんはローラースケートをはいてすべり下り，B さんは秒速 1 m の速さで歩いて坂を下りた。A さんが坂を下り始めてから x 秒間に進む距離を y m とすると，$y=\frac{1}{4}x^2$ という関係が成り立つとき，次の問いに答えなさい。

(1)　A さんと B さんがそれぞれ進む様子を表すグラフをかきなさい。

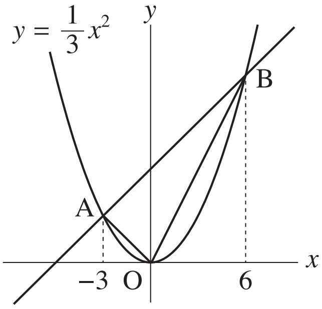
(2)　A さんが B さんに追いつくのは，2 人が坂を下り始めてから何秒後か求めなさい。



第24講・放物線と直線

例題 1　放物線と直線

問題



関数 $y = \frac{1}{3}x^2$ のグラフ上に，2点A，Bがある。A，Bの x 座標がそれぞれ -3，6であるとき，次の問いに答えなさい。

(1)　点A，Bの座標を，それぞれ求めなさい。

(2)　2点A，Bを通る直線の式を求めなさい。

(3)　△OABの面積を求めなさい。ただし，座標の1目もりを1 cmとします。

解答

MEMO

(1)　$y = \frac{1}{3}x^2$ に点A，Bの x 座標を代入すると，

$x = -3$ のとき

$$y = \frac{1}{3} \times (-3)^2$$
$$= 3$$

$x = 6$ のとき

$$y = \frac{1}{3} \times 6^2$$
$$= 12$$

したがって，点A，Bの座標は

A(−3，3)　　B(6，12)　･･･(答)

⑵　A(−3，3)，B(6，12) を通る直線の傾きは

$$\frac{12-3}{6-(-3)} = \frac{9}{9}$$

$$= 1$$

よって，この 1 次関数は

$y = x + b$

と書くことができる。グラフが点 (−3，3) を通るから，上の式に $x = -3$，$y = 3$ を代入すると

$3 = -3 + b$

$b = 6$

したがって

$y = x + 6$　…(答)

⑶　直線 AB と y 軸との交点を C とすると

△OAB = △OAC + △OBC

となる。OC = 6 だから

$$\triangle OAC = \frac{1}{2} \times 6 \times 3$$

$$= 9 \ (cm^2)$$

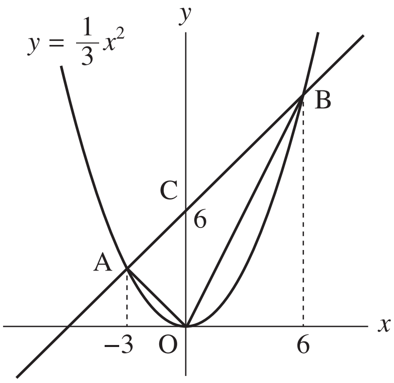
$$\triangle OBC = \frac{1}{2} \times 6 \times 6$$

$$= 18 \ (cm^2)$$

よって

△OAB = 9 + 18

= **27 (cm^2)**　**…(答)**



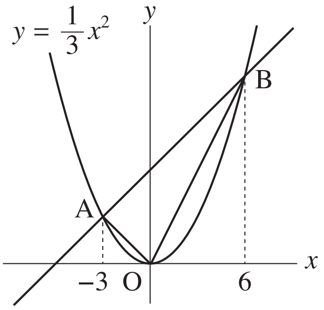
確認テスト 1

関数 $y = \frac{1}{3}x^2$ のグラフ上に，2 点 A，B がある。A，B の x 座標がそれぞれ −3，6 であるとき，次の問いに答えなさい。

⑴　点 A，B の座標を，それぞれ求めなさい。

⑵　2 点 A，B を通る直線の式を求めなさい。

⑶　△OAB の面積を求めなさい。ただし，座標の 1 目もりを 1 cm とします。



第 25 講・いろいろな関数

例題 1　料金表の問題

問題

右の表は，あるタクシー会社の走行距離と料金をまとめたものである。タクシーの走行距離を x km，そのときの料金を y 円として，次の問いに答えなさい。

(1)　走行距離が 1.6 km のときの料金を答えなさい。

(2)　料金が 600 円になる走行距離を x km とするとき，x の値の範囲を，不等号を使って表しなさい。

(3)　x と y の関係を表すグラフをかきなさい。

走行距離	料金
1 km まで	500 円
1.25 km まで	550 円
1.5 km まで	600 円
1.75 km まで	650 円
2 km まで	700 円

解答

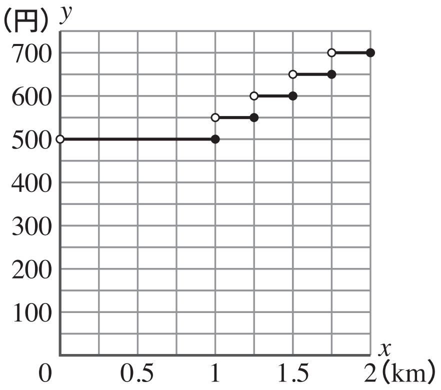
(1)　走行距離が 1.75 km までの料金より

650 円　…(答)

(2)　走行距離が 1.25 km より長く 1.5 km 以下のとき，料金は 600 円になるので

$\mathbf{1.25 < x \leqq 1.5}$　…(答)

(3)　グラフは次のようになる。



MEMO

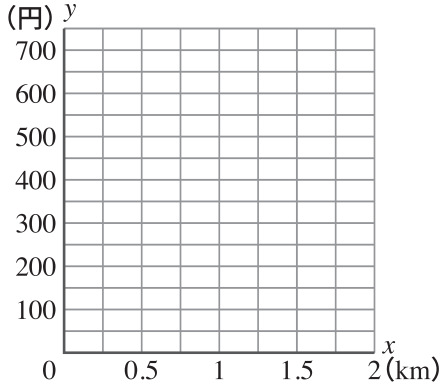
確認テスト 1

右の表は，あるタクシー会社の走行距離と料金をまとめたものである。タクシーの走行距離を x km，そのときの料金を y 円として，次の問いに答えなさい。

(1) 走行距離が 1.6 km のときの料金を答えなさい。

(2) 料金が 600 円になる走行距離を x km とするとき，x の値の範囲を，不等号を使って表しなさい。

(3) x と y の関係を表すグラフをかきなさい。



走行距離	料金
1 km まで	500 円
1.25 km まで	550 円
1.5 km まで	600 円
1.75 km まで	650 円
2 km まで	700 円

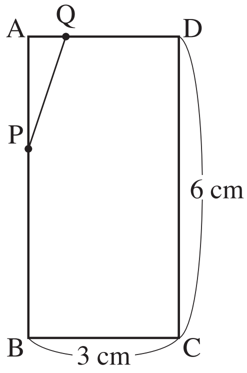
例題 2 動点の問題

問題

右の図のような長方形 ABCD で，2 点 P，Q は同時に点 A を出発し，点 P は秒速 3 cm で辺 AB，BC 上を点 C まで，点 Q は秒速 1 cm で辺 AD 上を点 D まで動く。点 P，Q が点 A を出発してから x 秒後の △APQ の面積を y cm^2 とするとき，次の問いに答えなさい。

(1) 点 P が辺 AB 上を動くとき，x の変域を答えなさい。また，y を x の式で表しなさい。

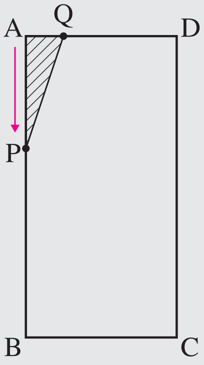
(2) 点 P が辺 BC 上を動くとき，x の変域を答えなさい。また，y を x の式で表しなさい。

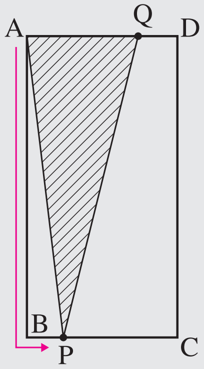


ポイント

● 点 P の位置により，△APQ の形が変わる → 図中にかき込んで整理する

① 点 A → 点 B　　② 点 B → 点 C





解答

(1)　点 P は秒速 3 cm で動くので，点 A を出発してから 2 秒後に点 B に着く。よって，x の変域は

$0 \leqq x \leqq 2$　…(答)

また，点 P，Q の動く速さから

$\mathrm{AP} = 3x$ cm

$\mathrm{AQ} = x$ cm

と表すことができるので

$$\triangle \mathrm{APQ} = \frac{1}{2} \times 3x \times x$$

$$= \frac{3}{2}x^2 \ (\mathrm{cm}^2)$$

よって

$y = \frac{3}{2}x^2$　…(答)

MEMO

(1)

⑵　点 P は秒速 3 cm で動くので，点 B を出発してから 1 秒後に点 C に着く。よって，点 P は点 A を出発してから 2 秒後に点 B，3 秒後に点 C に着くから，x の変域は

$2 \leqq x \leqq 3$　…(答)

点 Q は秒速 1 cm で動くので

$\mathrm{AQ} = x\ \mathrm{cm}$

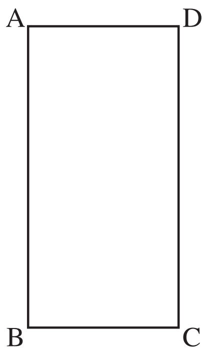
と表すことができ，△APQ において辺 AQ を底辺とみると，高さは辺 AB の長さに等しい。したがって

$$\triangle\mathrm{APQ} = \frac{1}{2} \times x \times 6$$
$$= 3x\ (\mathrm{cm}^2)$$

よって

$y = 3x$　…(答)

⑵

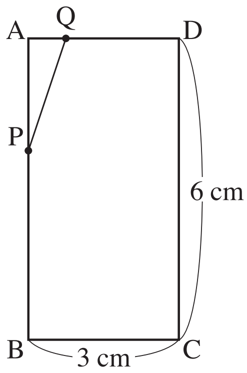


確認テスト 2

右の図のような長方形 ABCD で，2 点 P，Q は同時に点 A を出発し，点 P は秒速 3 cm で辺 AB，BC 上を点 C まで，点 Q は秒速 1 cm で辺 AD 上を点 D まで動く。点 P，Q が点 A を出発してから x 秒後の △APQ の面積を $y\ \mathrm{cm}^2$ とするとき，次の問いに答えなさい。

⑴　点 P が辺 AB 上を動くとき，x の変域を答えなさい。また，y を x の式で表しなさい。

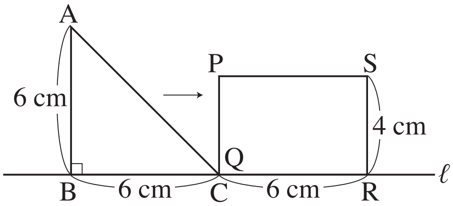
⑵　点 P が辺 BC 上を動くとき，x の変域を答えなさい。また，y を x の式で表しなさい。



例題 3　重なる図形の問題

問題

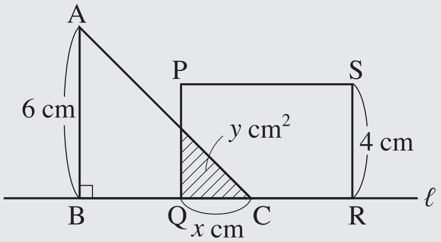
右の図のような AB = BC = 6 cm，∠B = 90° の直角二等辺三角形 ABC と SR = 4 cm，QR = 6 cm の長方形 PQRS がある。はじめ，辺 BC と辺 QR は，直線 ℓ 上にあり，点 C と点 Q は重なっている。△ABC を直線 ℓ にそって矢印の方向に，点 C が点 R に重なるまで移動させ，△ABC が x cm 動いたときの △ABC と長方形 PQRS の重なる部分の面積を y cm² とする。このとき，次の問いに答えなさい。

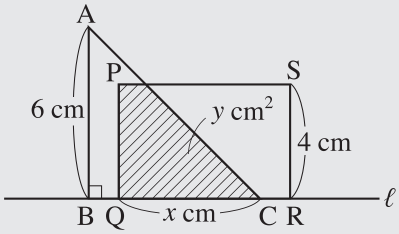


(1)　$0 \leqq x \leqq 4$ のとき，x と y の関係を式に表しなさい。
(2)　$4 < x \leqq 6$ のとき，x と y の関係を式に表しなさい。
(3)　点 C が点 R に重なるまで動くときの x と y の関係を表すグラフをかきなさい。

ポイント

● △ABC が動いた距離 x cm により，**重なる部分の形や大きさが変わる** → 図をかいて整理する

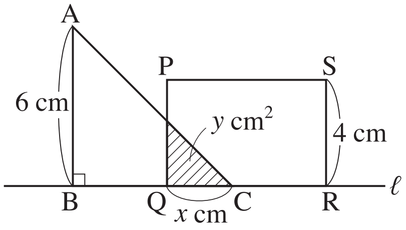




解答

MEMO

⑴　$0 \leqq x \leqq 4$ のとき，重なった部分は次の図のような直角二等辺三角形である。



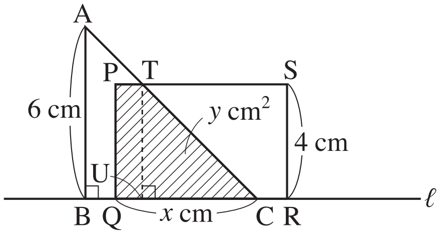
よって

$$y = \frac{1}{2} \times x \times x$$

右辺を整理して

$$\boldsymbol{y = \frac{1}{2}x^2} \quad \cdots\textbf{(答)}$$

⑵　$4 < x \leqq 6$ のとき，重なった部分は次の図のような台形である。



上の図のように 2 点 T，U をとると

TU = SR = 4 cm

△TUC は直角二等辺三角形だから

UC = TU = 4 cm

したがって

PT = QU

= QC − UC

= $x - 4$（cm）

よって

$$y = \frac{1}{2} \times \{(x-4) + x\} \times 4$$

右辺を整理して

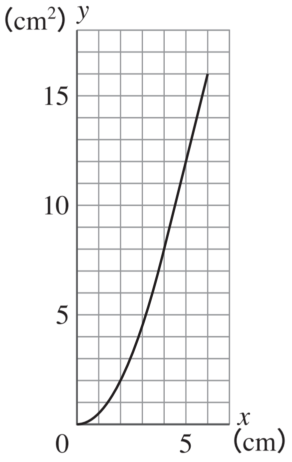
$$\boldsymbol{y = 4x - 8} \quad \cdots\textbf{(答)}$$

(3)　(1)，(2)より

$0 \leqq x \leqq 4$ のとき，$y = \frac{1}{2}x^2$

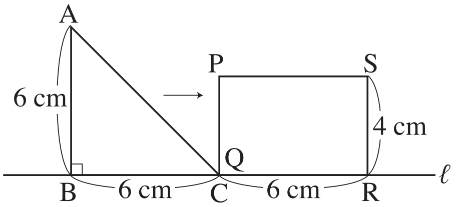
$4 < x \leqq 6$ のとき，$y = 4x - 8$

よって，グラフは次の図のようになる。



確認テスト 3

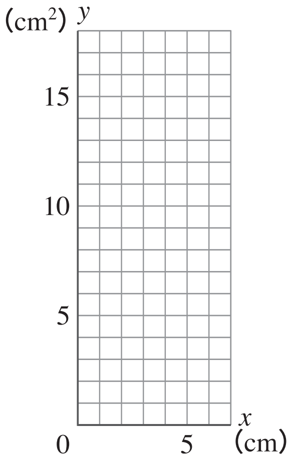
右の図のような AB = BC = 6 cm，∠B = 90° の直角二等辺三角形 ABC と SR = 4 cm，QR = 6 cm の長方形 PQRS がある。はじめ，辺 BC と辺 QR は，直線 ℓ 上にあり，点 C と点 Q は重なっている。△ABC を直線 ℓ にそって矢印の方向に，点 C が点 R に重なるまで移動させ，△ABC が x cm 動いたときの △ABC と長方形 PQRS の重なる部分の面積を y cm² とする。このとき，次の問いに答えなさい。



(1)　$0 \leqq x \leqq 4$ のとき，x と y の関係を式に表しなさい。

(2)　$4 < x \leqq 6$ のとき，x と y の関係を式に表しなさい。

(3)　点 C が点 R に重なるまで動くときの x と y の関係を表すグラフをかきなさい。



[メモ]

第 26 講・相似な図形

例題 1　相似な図形

ポイント

● 1 つの図形を，形を変えずに一定の割合で拡大，または縮小して得られる図形は，もとの図形と相似（そうじ）であるという。2 つの図形が相似であることを，∽ の記号を使って表す

（例）△ABC と △A′B′C′ が相似 → △ABC ∽ △A′B′C′

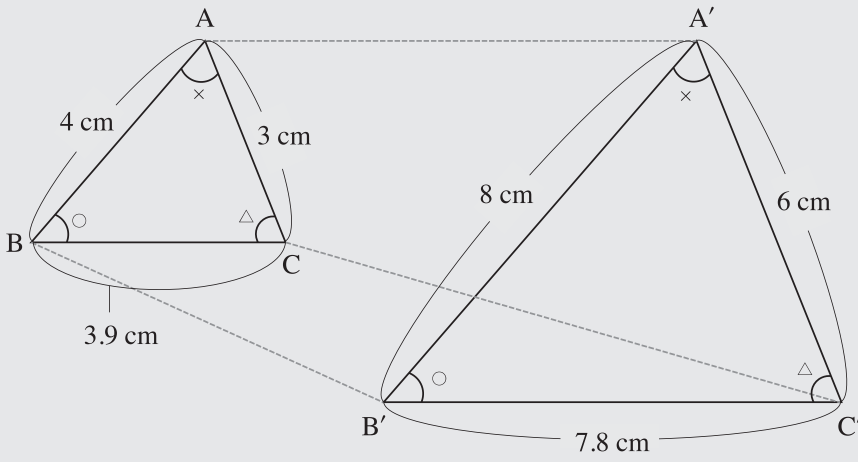
● 相似な図形について，次のことがいえる

1　対応する線分の比（相似比）はすべて等しい

2　対応する角はそれぞれ等しい

（例）△ABC と △A′B′C′ で，対応する辺や角を比べると次のようになる

このとき，△ABC と △A′B′C′ の相似比は 1 : 2



問題

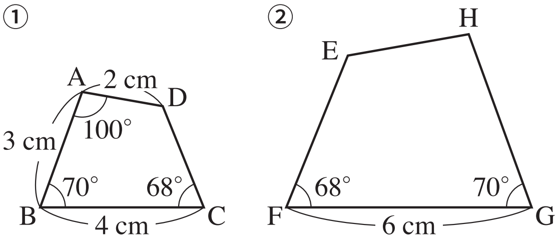
右の図で，2 つの四角形①，②は相似である。このとき，次の問いに答えなさい。

⑴　四角形①，②が相似であることを，記号 ∽ を使って表しなさい。

⑵　∠H の大きさを求めなさい。

⑶　四角形①と四角形②の相似比を求めなさい。

⑷　辺 HG の長さを求めなさい。



解答

⑴　**四角形 ABCD ∽ 四角形 HGFE**　…(答)

⑵　対応する角は等しいので

$\angle H = \angle A$

$= \mathbf{100^\circ}$　…(答)

⑶　対応する辺の比が相似比だから

$BC : GF = 4 : 6$

$= \mathbf{2 : 3}$　…(答)

⑷　四角形 ABCD と四角形 HGFE の相似比が 2 : 3 なので，辺 HG の長さを x cm とおくと

$AB : HG = BC : GF$

$3 : x = 2 : 3$

$x \times 2 = 3 \times 3$

$2x = 9$

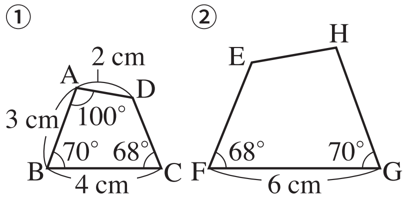
$x = \dfrac{9}{2}$

よって

$\mathbf{\dfrac{9}{2}}$ **cm**　…(答)

MEMO

⑴



確認テスト 1

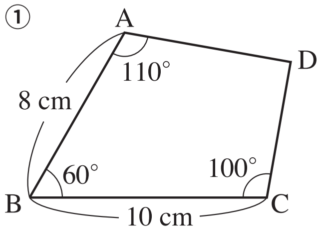
右の図で，2 つの四角形①，②は相似である。このとき，次の問いに答えなさい。

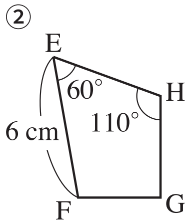
(1)　四角形①，②が相似であることを，記号 ∽ を使って表しなさい。

(2)　∠F の大きさを求めなさい。

(3)　四角形①と四角形②の相似比を求めなさい。

(4)　辺 HE の長さを求めなさい。



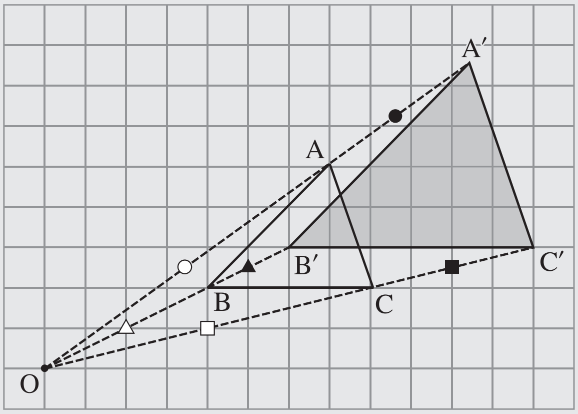


例題 2　相似な図形の作図

ポイント

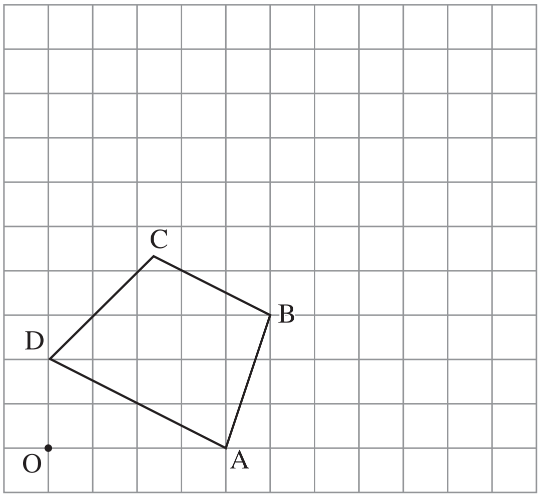
● 次の △ABC と △A′B′C′ のように，2 つの図形の対応する点どうしを通る直線が，すべて点 O に集まり，点 O から対応する各点までの距離の比がすべて等しいとき，2 つの図形は点 O を**相似の中心**として**相似の位置にある**という

→ 相似の位置にある △ABC と △A′B′C′ は，相似な図形



問題

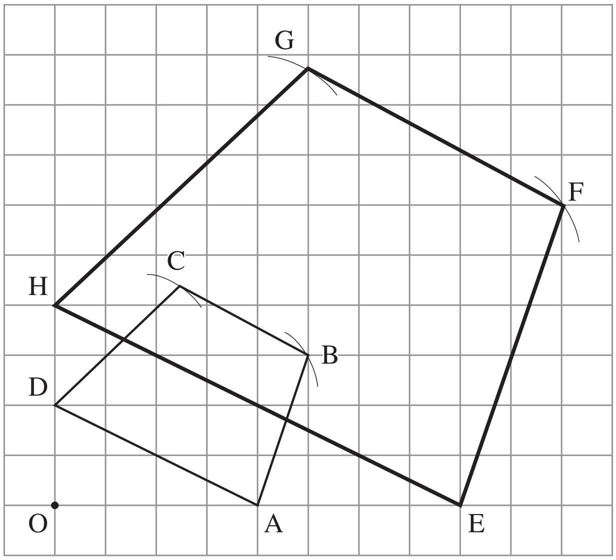
右の図で，点 O を相似の中心として，四角形 ABCD を 2 倍に拡大した四角形 EFGH をかきなさい。



解答

相似の中心点 O から，次のような位置にある点 E，F，G，H をそれぞれかく。

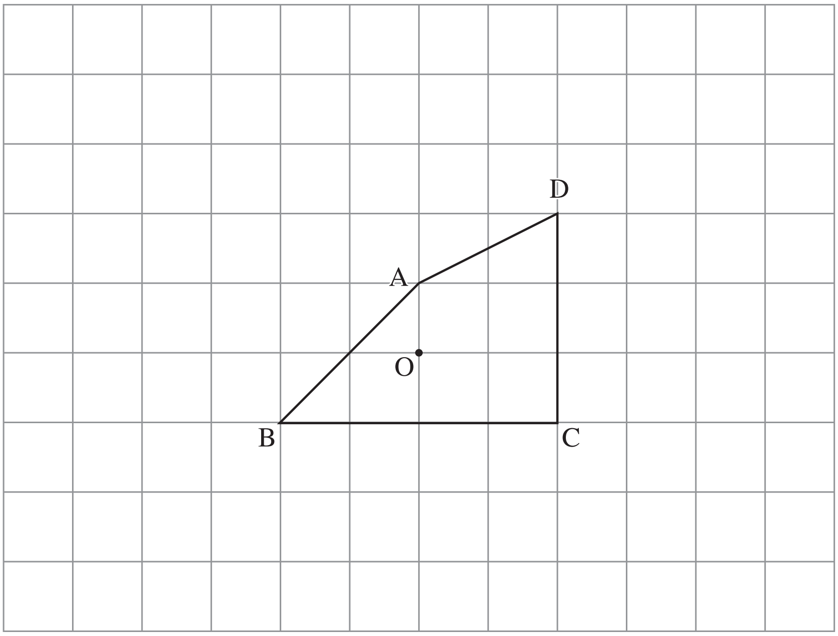
OA = AE，OB = BF，OC = CG，OD = DH



MEMO

確認テスト 2

次の図で，点 O を相似の中心として，四角形 ABCD を 2 倍に拡大した四角形 EFGH をかきなさい。



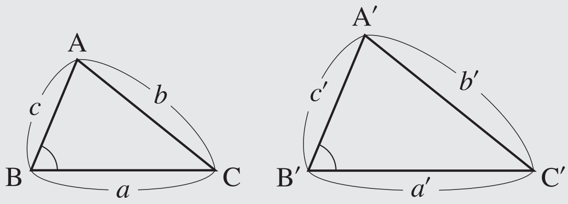
第 27 講・三角形の相似条件

例題 1　三角形の相似条件①

ポイント

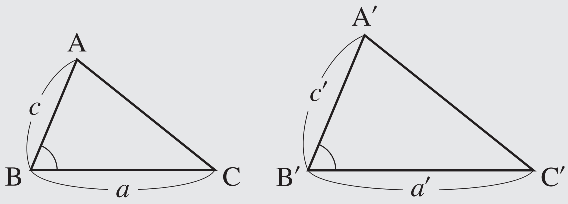
● 三角形の相似条件 ： 次の 3 つのどれかが成り立つとき，2 つの三角形は相似である

[1] 3 組の辺の比がすべて等しい



$a : a' = b : b' = c : c'$

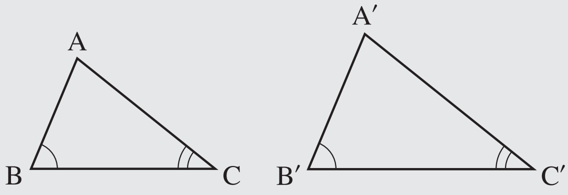
[2] 2 組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しい



$a : a' = c : c'$

$\angle B = \angle B'$

[3] 2 組の角がそれぞれ等しい



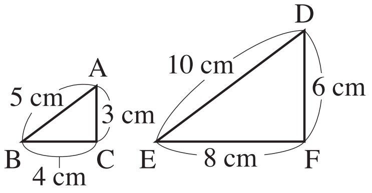
$\angle B = \angle B'$

$\angle C = \angle C'$

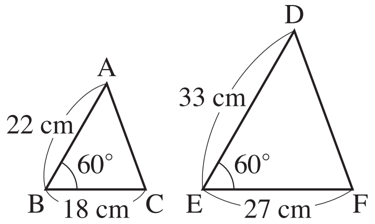
問題

次の場合について，2 つの三角形が相似であることを，記号 ∽ を使って表しなさい。なお，そのときに使った相似条件を示すこと。

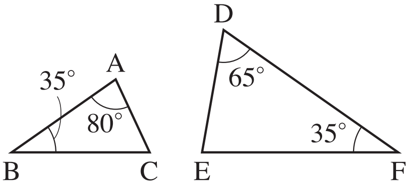
(1)



(2)



(3)



解答

(1) AB : DE = 5 : 10 = 1 : 2

BC : EF = 4 : 8 = 1 : 2

CA : FD = 3 : 6 = 1 : 2

だから，**3 組の辺の比がすべて等しい**ので

△ABC ∽ △DEF　…(答)

(2) AB : DE = 22 : 33 = 2 : 3

BC : EF = 18 : 27 = 2 : 3

∠ABC = ∠DEF = 60°

だから，**2 組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しい**ので

△ABC ∽ △DEF　…(答)

(3) ∠E = 180° − 65° − 35°

= 80°

よって

∠A = ∠E

∠B = ∠F

だから，**2 組の角がそれぞれ等しい**ので

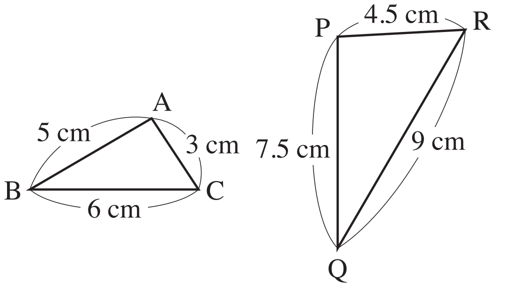
△ABC ∽ △EFD　…(答)

MEMO

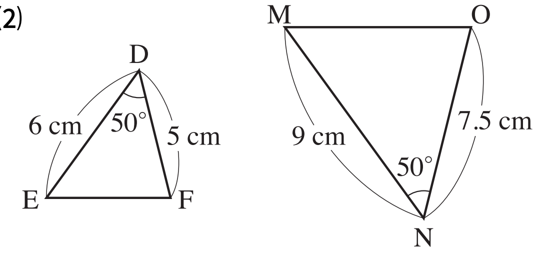
確認テスト 1

次の場合について，2 つの三角形が相似であることを，記号 ∽ を使って表しなさい。また，そのときに使った相似条件を答えなさい。

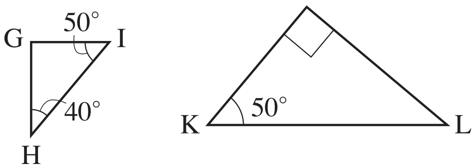
(1)



(2)



(3)

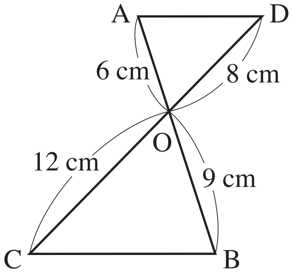


例題 2　三角形の相似条件②

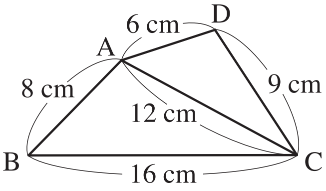
問題

次の図で，相似な三角形を記号 ∽ を使って表しなさい。なお，そのときに使った相似条件を示すこと。

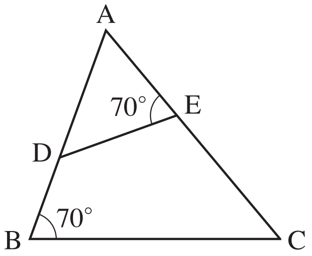
(1)



(2)



(3)



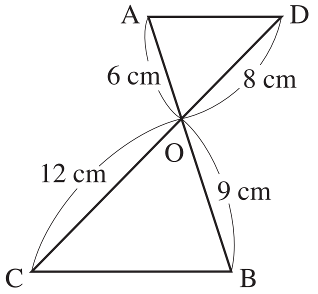
解答

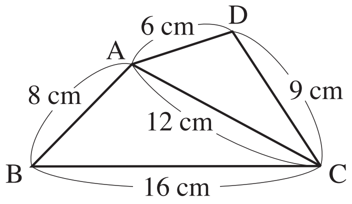
(1)　OA : OB = 6 : 9 = 2 : 3
　　OD : OC = 8 : 12 = 2 : 3
　対頂角は等しいので
　　　∠AOD = ∠BOC
　だから，2 組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいので
　　　△OAD ∽ △OBC　…(答)

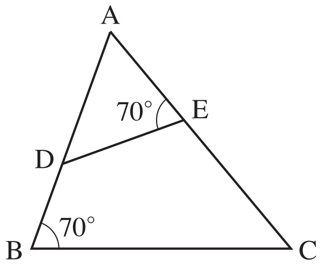
(2)　AB : DA = 8 : 6 = 4 : 3
　　BC : AC = 16 : 12 = 4 : 3
　　CA : CD = 12 : 9 = 4 : 3
　だから，**3 組の辺の比がすべて等しい**ので
　　　△ABC ∽ △DAC　…(答)

(3)　∠ABC = ∠AED = 70°
　　∠A は共通
　だから，**2 組の角がそれぞれ等しい**ので
　　　△ABC ∽ △AED　…(答)

MEMO

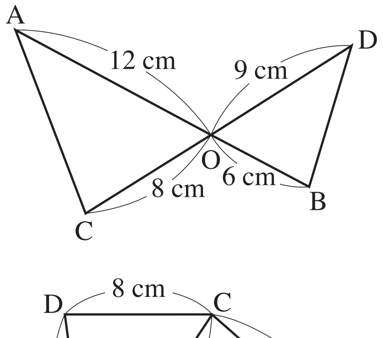
(1)


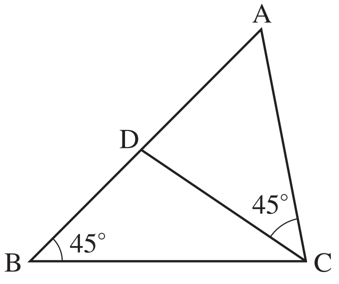
(2)


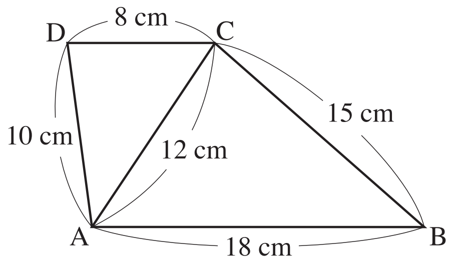
(3)


確認テスト 2

　次の図で，相似な三角形を記号 ∽ を使って表しなさい。また，そのときに使った相似条件を答えなさい。

(1)


(2)


(3)


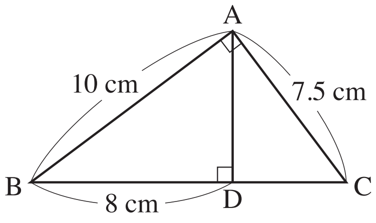
例題 3　三角形の相似の利用

問 題

右の図について，次の問いに答えなさい。

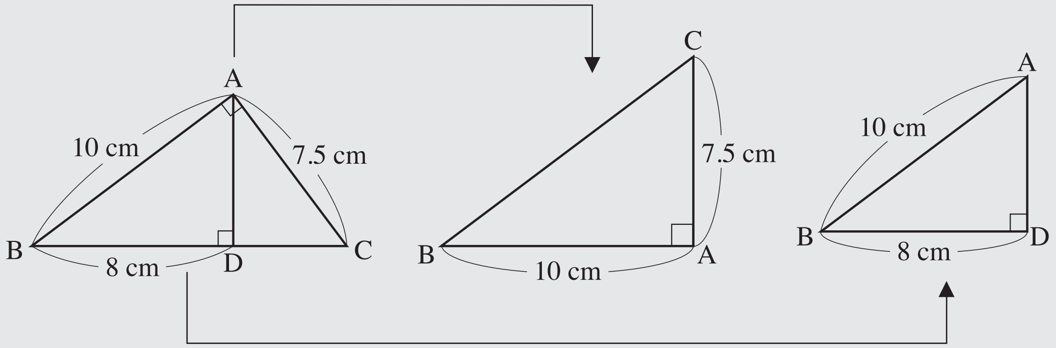
(1)　BC の長さを求めなさい。

(2)　AD の長さを求めなさい。



ポイント

● 相似な図形の辺の長さの求め方 → 対応する辺の長さの比はすべて等しいことを利用して，辺の長さの比例式をつくる



解 答

(1)　∠BAC = ∠BDA = 90°

∠B は共通

だから，2 組の角がそれぞれ等しいので

△ABC ∽ △DBA

よって，対応する辺の比は等しいので

BA : BD = BC : BA

10 : 8 = BC : 10

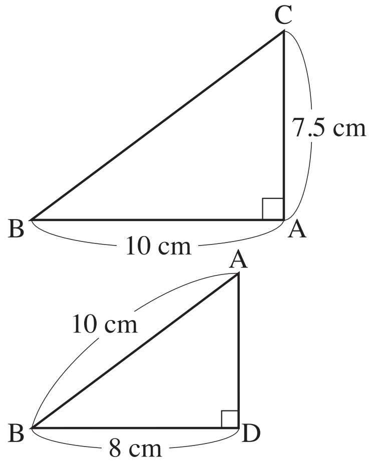
8 × BC = 10 × 10

8BC = 100

BC = **12.5（cm）**　…(答)

MEMO

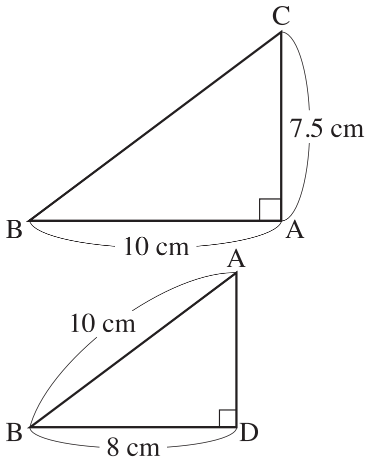
(1)



(2)　$\triangle ABC \backsim \triangle DBA$ より，対応する辺の比は等しいので

$$CA : AD = BA : BD$$
$$7.5 : AD = 10 : 8$$
$$AD \times 10 = 7.5 \times 8$$
$$10AD = 60$$
$$AD = \mathbf{6}\ \text{(cm)}$$ …(答)

(2)

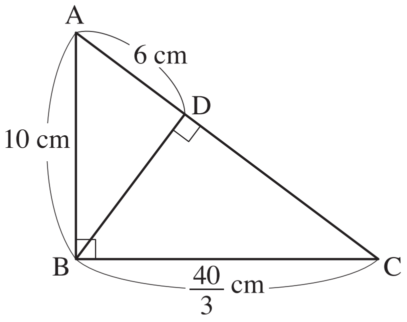


確認テスト 3

右の図について，次の問いに答えなさい。

(1)　AC の長さを求めなさい。

(2)　BD の長さを求めなさい。



第28講・三角形の相似の証明

例題 1 三角形の相似の証明①

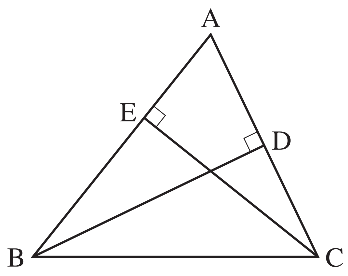
ポイント

● 2 つの三角形が相似であることを証明するとき，次のように証明を進める

（例）
△OAB と △ODC において ← 証明したい 2 つの三角形を書く
仮定より
OA : OD = 4 : 6 = 2 : 3 …①
OB : OC = 10 : 15 = 2 : 3 …②
対頂角は等しいから
∠AOB = ∠DOC …③
（根拠とともに等しい辺の比や角を示す）
①，②，③より，2 組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいから（相似条件を述べる）
△OAB ∽ △ODC **（証明終）** ← 結論を述べる

問題

右の図のような △ABC で，点 D，E はそれぞれ点 B，C から辺 AC，AB にひいた垂線と辺との交点であるとき，△ABD ∽ △ACE であることを証明したい。このとき，空欄 (1) ～ (3) を埋めなさい。



【証明】
△ABD と △ACE において
仮定より，点 D，E はそれぞれ点 B，C から辺 AC，AB にひいた垂線と辺との交点であるから
∠ADB = (1) = 90° …①
また
(2) …②
①，②より，(3) から
△ABD ∽ △ACE **（証明終）**

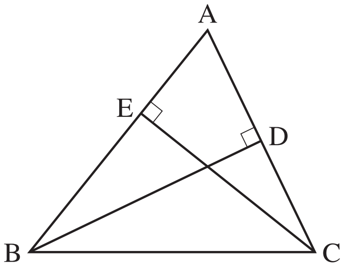
解答

⑴　∠AEC

⑵　∠A は共通

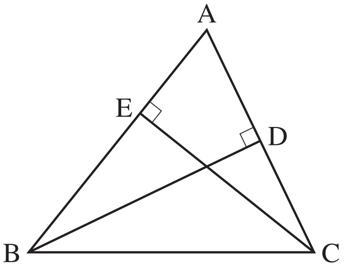
⑶　2 組の角がそれぞれ等しい

MEMO



確認テスト 1

右の図のような △ABC で，点 D，E はそれぞれ点 B，C から辺 AC，AB にひいた垂線と辺との交点であるとき，△ABD ∽ △ACE であることを証明したい。このとき，空欄 ⑴ ～ ⑶ を埋めなさい。



【証明】

△ABD と △ACE において，仮定より，点 D，E はそれぞれ点 B，C から辺 AC，AB にひいた垂線と辺との交点であるから

∠ADB = ⑴ = 90°　…①

また

⑵　…②

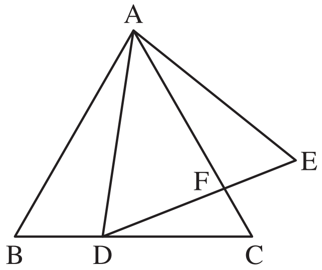
①，②より，⑶ から

△ABD ∽ △ACE　**（証明終）**

例題 2　三角形の相似の証明②

問題

右の図で，△ABC と △ADE は正三角形で，辺 AC と辺 DE の交点を F とする。△ABD ∽ △AEF であることを証明するとき，空欄 (1) ～ (3) を埋めなさい。



【証明】

△ABD と △AEF において，△ABC と △ADE は正三角形だから

$\angle ABD =$ (1) $= 60^\circ$　…①

$\angle BAD = \angle BAC -$ (2) $= 60^\circ -$ (2)　…②

$\angle EAF = \angle DAE -$ (2) $= 60^\circ -$ (2)　…③

②，③より

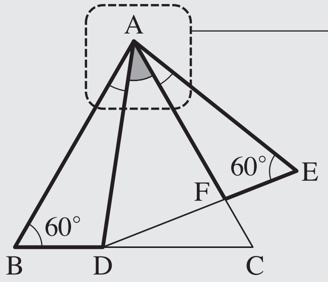
$\angle BAD = \angle EAF$　…④

①，④より， (3) から

△ABD ∽ △AEF　**（証明終）**

ポイント

● 正三角形を利用した相似の証明 → 正三角形の角はすべて 60° であることから，等しい角を式で表す



$\angle BAD + \angle CAD = \mathbf{\angle BAC}$

共有　60°

$\angle EAF + \angle CAD = \mathbf{\angle DAE}$

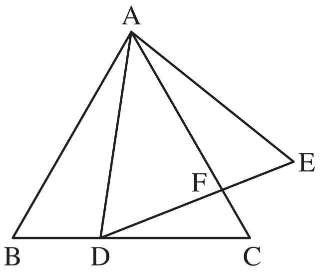
解答

⑴　**∠AEF　…(答)**

⑵　**∠CAD　…(答)**

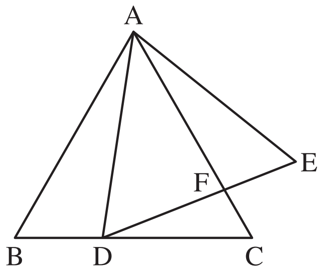
⑶　**2 組の角がそれぞれ等しい　…(答)**

MEMO



確認テスト 2

　右の図で，△ABC と △ADE は正三角形で，辺 AC と辺 DE の交点を F とする。△ABD ∽ △AEF であることを証明するとき，空欄 ⑴ ～ ⑶ を埋めなさい。



【証明】

△ABD と △AEF において，△ABC と △ADE は正三角形だから

∠ABD = ⑴ = 60°　…①

∠BAD = ∠BAC − ⑵ = 60° − ⑵　…②

∠EAF = ∠DAE − ⑵ = 60° − ⑵　…③

②，③より

∠BAD = ∠EAF　…④

①，④より，⑶ から

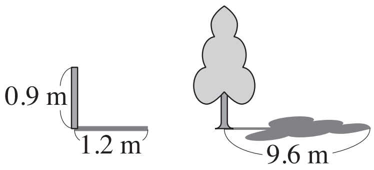
△ABD ∽ △AEF　**(証明終)**

第29講・相似の利用

例題 1　相似の利用

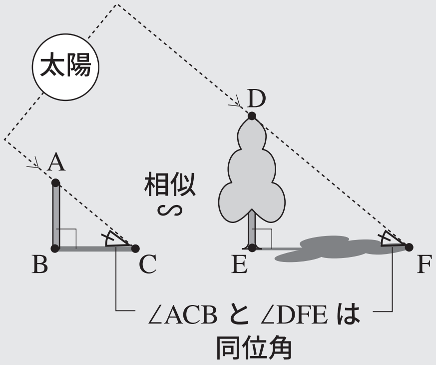
問題

　次の図のように，長さ 0.9 m の棒の影の長さが 1.2 m のとき，木の影の長さをはかったら，9.6 m だった。この木の高さを求めなさい。ただし，太陽の光は棒と木のそれぞれに平行に当たっており，棒も木も地面に対して垂直に立っているものとする。



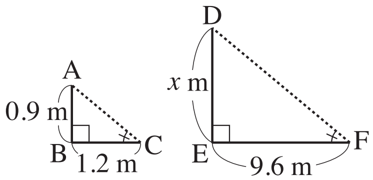
ポイント

● 平行な補助線をひいて相似な図形をみつけ，対応する辺の比から長さを求める



解答

次の図のように，棒と棒の影がつくる三角形を △ABC，また木と木の影がつくる三角形を △DEF とする。



上の図より，△ABC と △DEF は 2 組の角がそれぞれ等しいので，△ABC ∽ △DEF となる。
木の高さを x m とすると

$$AB : DE = BC : EF$$
$$0.9 : x = 1.2 : 9.6$$
$$= 1 : 8$$

したがって

$$x \times 1 = 0.9 \times 8$$
$$x = 7.2$$

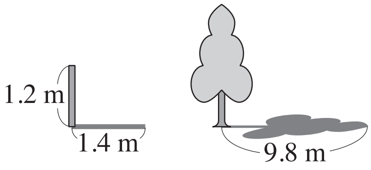
よって

7.2 m　…(答)

MEMO

確認テスト 1

次の図のように，長さ 1.2 m の棒の影の長さが 1.4 m のとき，木の影の長さをはかったら，9.8 m あった。この木の高さを求めなさい。ただし，太陽の光は棒と木のそれぞれに平行に当たっており，棒も木も地面に対して垂直に立っているものとする。



第 30 講・三角形と線分の比

例題 1　三角形と線分の比

ポイント

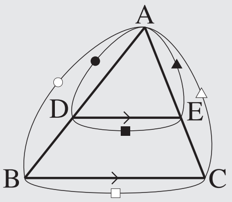
● 三角形と比の定理

△ABC の直線 AB，AC 上の点をそれぞれ D，E とするとき，

1　DE // BC ならば，AD : AB = AE : AC = DE : BC

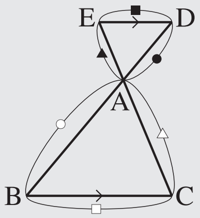
[ピラミッド型]

AD : AB = AE : AC = DE : BC
●　○　▲　△　■　□



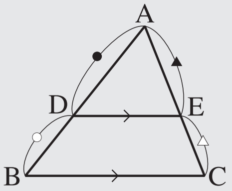
[砂時計型]

AD : AB = AE : AC = DE : BC
●　○　▲　△　■　□



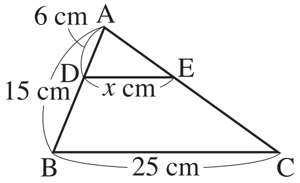
2　DE // BC ならば，AD : DB = AE : EC

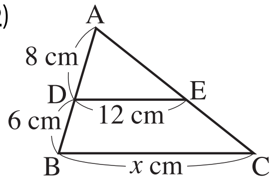
AD : DB = AE : EC
●　○　▲　△

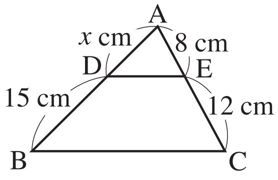


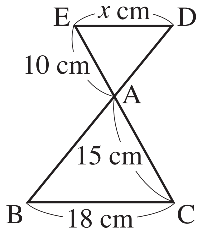
問題

次の図で，DE // BC のとき，x の値を求めなさい。

(1)


(2)


(3)


(4)


解答

(1) DE // BC だから

$AD : AB = DE : BC$

$6 : 15 = x : 25$

$15 \times x = 6 \times 25$

$15x = 150$

$x = \mathbf{10}$ …(答)

(2) DE // BC だから

$AD : AB = DE : BC$

$8 : (8 + 6) = 12 : x$

$8 \times x = 14 \times 12$

$8x = 168$

$x = \mathbf{21}$ …(答)

(3) DE // BC だから

$AD : DB = AE : EC$

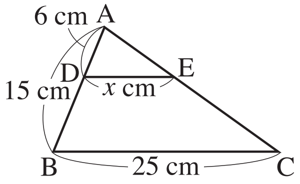
$x : 15 = 8 : 12$

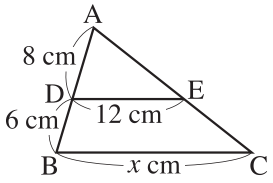
$x \times 12 = 15 \times 8$

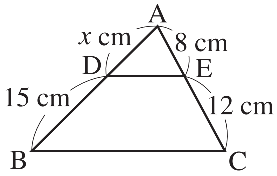
$12x = 120$

$x = \mathbf{10}$ …(答)

MEMO

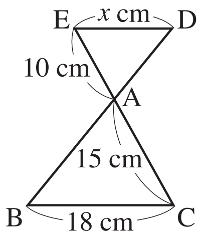
(1)


(2)


(3)


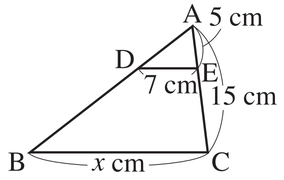
(4)　DE // BC だから

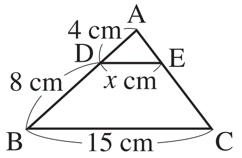
$$AC : AE = BC : DE$$
$$15 : 10 = 18 : x$$
$$15 \times x = 10 \times 18$$
$$15x = 180$$
$$x = \mathbf{12}$$ …(答)

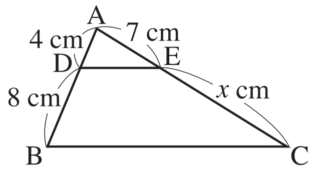
(4)


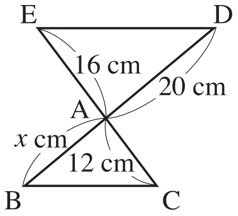
確認テスト 1

次の図で，DE // BC のとき，x の値を求めなさい。

(1)


(2)


(3)


(4)


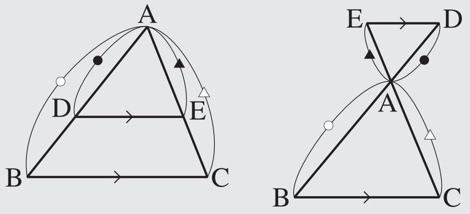
例題 2　線分の比と三角形

ポイント

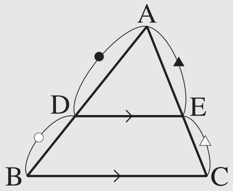
● 三角形と比の定理の逆

△ABC の直線 AB，AC 上の点をそれぞれ D，E とするとき

1　AD : AB = AE : AC ならば，DE // BC



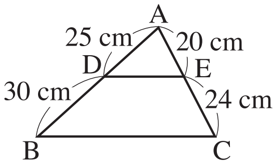
2　AD : DB = AE : EC ならば，DE // BC



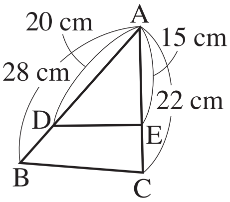
問題

次の図で，DE // BC が成り立つときは○，成り立たないときは×と答えなさい。

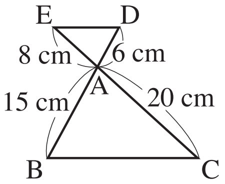
(1)



(2)



(3)



解答

(1)　AD : DB = 25 : 30
　　　　　　= 5 : 6
　　AE : EC = 20 : 24
　　　　　　= 5 : 6

よって，対応する辺の比が等しいから，DE // BC は成り立つ。

○　…(答)

(2)　AD : AB = 20 : 28
　　　　　　= 5 : 7
　　AE : AC = 15 : 22

よって，対応する辺の比が等しくないから，DE // BC は成り立たない。

×　…(答)

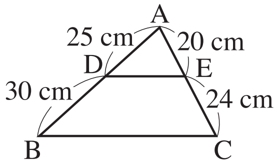
(3)　AD : AB = 6 : 15
　　　　　　= 2 : 5
　　AE : AC = 8 : 20
　　　　　　= 2 : 5

よって，対応する辺の比が等しいから，DE // BC は成り立つ。

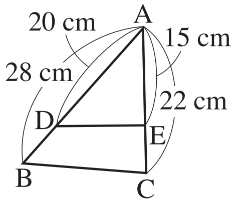
○　…(答)

MEMO

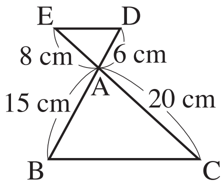
(1)



(2)



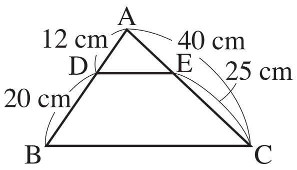
(3)



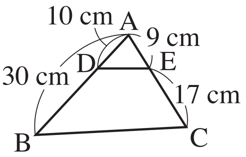
確認テスト 2

次の図で，DE // BC が成り立つときは○，成り立たないときは×と答えなさい。

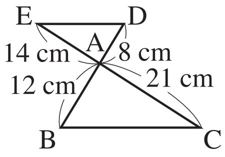
(1)



(2)



(3)

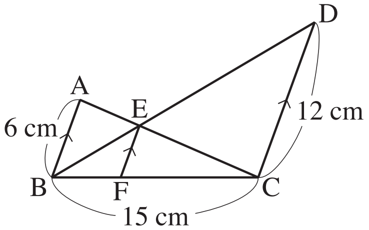


例題 3　三角形と線分の比の応用問題

問題

右の図のように，辺 BC を共有する △ABC と △DBC がある。点 E は辺 AC，BD の交点，点 F は辺 BC 上の点で，AB // EF // DC である。AB = 6 cm，BC = 15 cm，CD = 12 cm のとき，次の問いに答えなさい。

(1)　線分 EF の長さを求めなさい。
(2)　線分 FC の長さを求めなさい。



解答

(1)　△ABE と △CDE について，AB // CD より

AE : CE = AB : CD
　　= 6 : 12
　　= 1 : 2

△CEF と △CAB について，AB // EF より

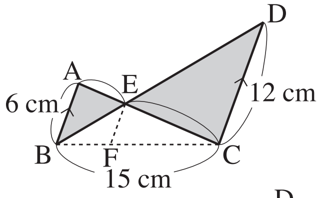
EF : AB = CE : CA
EF : 6 = 2 : (2 + 1)
EF × 3 = 6 × 2
3EF = 12
EF = **4（cm）**　…(答)

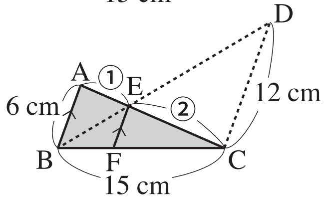
(2)　△CEF と △CAB について，AB // EF より

FC : BC = EC : AC
FC : 15 = 2 : 3
FC × 3 = 15 × 2
3FC = 30
FC = **10（cm）**　…(答)

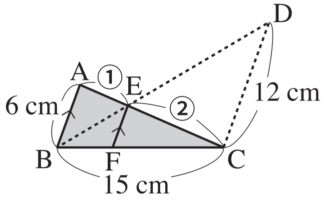
MEMO

(1)





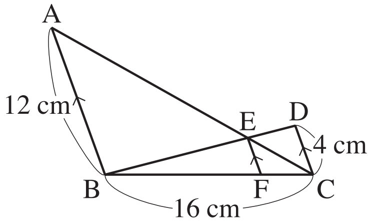
(2)



確認テスト 3

右の図のように，辺 BC を共有する △ABC と △DBC がある。点 E は辺 AC，BD の交点，点 F は辺 BC 上の点で，AB // EF // DC である。AB = 12 cm，BC = 16 cm，CD = 4 cm のとき，次の問いに答えなさい。

(1)　線分 EF の長さを求めなさい。
(2)　線分 FC の長さを求めなさい。

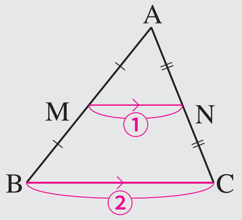


第 31 講・中点連結定理

例題 1　中点連結定理

ポイント

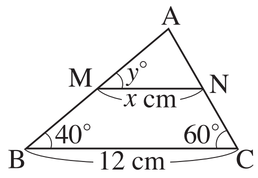
● 中点連結定理（ちゅうてんれんけつていり）：△ABC の 2 辺 AB，AC の中点をそれぞれ M，N とすると，MN // BC，$MN = \frac{1}{2}BC$ が成り立つ



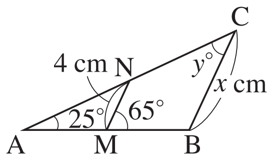
問題

次の図の △ABC で，2 辺 AB，AC の中点をそれぞれ M，N とする。このとき，x，y の値を求めなさい。

(1)



(2)



解答

(1)　△AMN について，中点連結定理により

$x = \frac{1}{2}BC$

$= \frac{1}{2} \times 12$

$= \mathbf{6}$　…(答)

また，MN // BC であるので

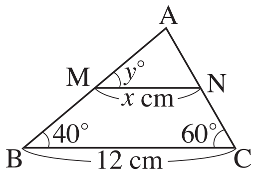
$\angle AMN = \angle MBC$

よって

$y = \mathbf{40}$　…(答)

MEMO

(1)



(2)　△ABC について，中点連結定理により

$x = 2\mathrm{MN}$

$= 2 \times 4$

$= \mathbf{8}$　…(答)

また，MN // BC だから同位角は等しいので

$\angle\mathrm{ANM} = \angle\mathrm{NCB}$

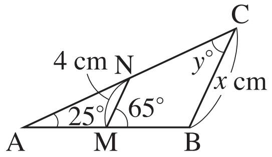
$= y^\circ$

三角形の内角と外角の性質より，

$y + 25 = 65$

$y = \mathbf{40}$　…(答)

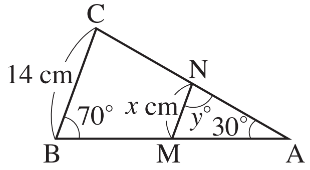
(2)



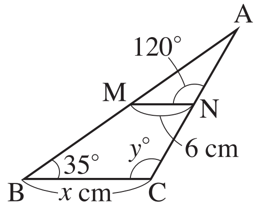
確認テスト 1

次の図の △ABC で，2 辺 AB，AC の中点をそれぞれ M，N とする。このとき，x，y の値を求めなさい。

(1)



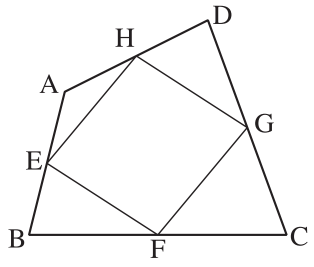
(2)



例題 2　中点連結定理の利用

問題

右の図の四角形 ABCD で，点 E，F，G，H はそれぞれ辺 AB，BC，CD，DA の中点であるとき，四角形 EFGH が平行四辺形になることを次のように証明する。このとき，空欄 (1) ～ (5) を埋めなさい。



【証明】

△ABD において，点 E，H はそれぞれ辺 AB，AD の中点だから，中点連結定理より

EH [(1)] BD，EH = [(2)]　…①

同様に，△CBD において

[(3)] // BD，FG = $\frac{1}{2}$BD　…②

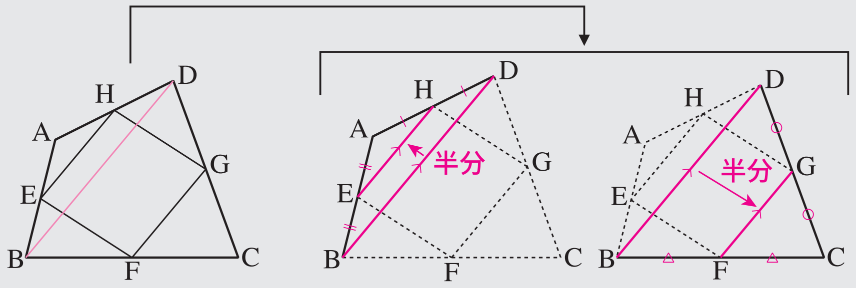
①，②より

[(4)]，EH = FG　…③

③より，四角形 EFGH において，[(5)] ので，四角形 EFGH は平行四辺形である。**（証明終）**

ポイント

● 四角形 ABCD を**対角線 BD で 2 つの三角形にわける**
→ 中点連結定理を利用して平行四辺形の条件を示す



解答

(1) //

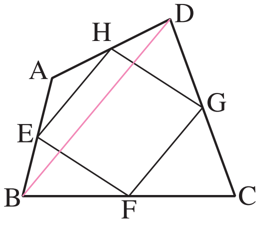
(2) $\frac{1}{2}$BD

(3) FG

(4) EH // FG

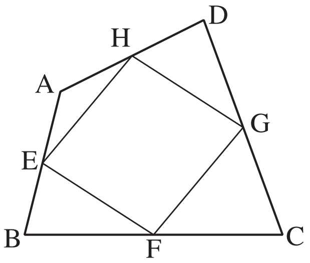
(5) 1 組の対辺が平行でその長さが等しい

MEMO



確認テスト 2

右の図の四角形 ABCD で，点 E，F，G，H はそれぞれ辺 AB，BC，CD，DA の中点であるとき，四角形 EFGH が平行四辺形になることを次のように証明する。このとき，空欄 (1) ～ (5) を埋めなさい。



【証明】

△ABD において，点 E，H はそれぞれ辺 AB，AD の中点だから，中点連結定理より

EH (1) BD，EH = (2) …①

同様に，△CBD において

(3) // BD，FG = $\frac{1}{2}$BD …②

①，②より

(4) ，EH = FG …③

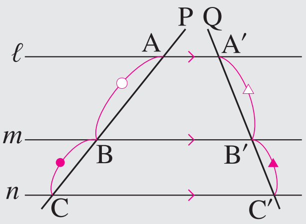
③より，四角形 EFGH において， (5) ので，四角形 EFGH は平行四辺形である。**（証明終）**

第32講・平行線と比

例題 1　平行線と比

ポイント

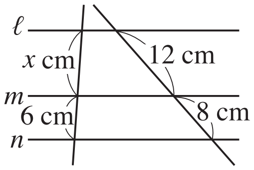
● 次のように，平行な３つの直線 ℓ，m，n が，直線 P とそれぞれ A，B，C で交わり，直線 Q とそれぞれ A′，B′，C′ で交わるとき，AB : BC = A′B′ : B′C′ が成り立つ



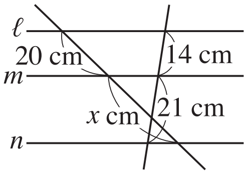
問題

次の図で，$\ell /\!/ m /\!/ n$ のとき，x の値を求めなさい。

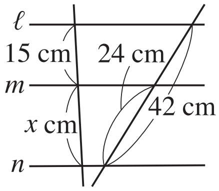
(1)



(2)



(3)



解答

(1) $x : 6 = 12 : 8$

$= 3 : 2$

よって

$x \times 2 = 6 \times 3$

$2x = 18$

$x = \mathbf{9}$ ・・・(答)

(2) $20 : x = 14 : 21$

$= 2 : 3$

よって

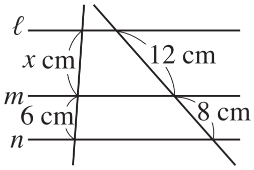
$x \times 2 = 20 \times 3$

$2x = 60$

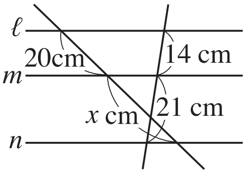
$x = \mathbf{30}$ ・・・(答)

MEMO

(1)



(2)



(3)　$15 : x = (42 - 24) : 24$

$= 18 : 24$

$= 3 : 4$

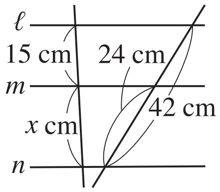
よって

$x \times 3 = 15 \times 4$

$3x = 60$

$x = \mathbf{20}$　・・・(答)

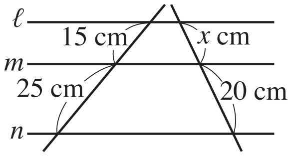
(3)



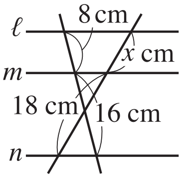
確認テスト 1

次の図で，$\ell /\!/ m /\!/ n$ のとき，x の値を求めなさい。

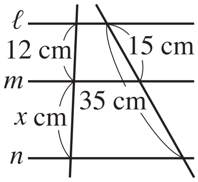
(1)



(2)



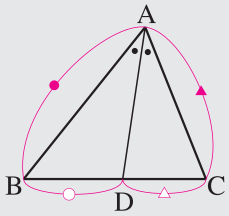
(3)



例題 2　角の二等分線と比

ポイント

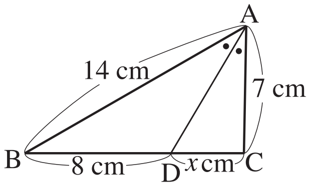
● 右のような △ABC で，∠A の二等分線と辺 BC との交点を D とすると，AB : AC = BD : DC が成り立つ



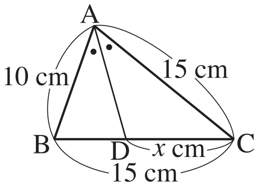
問題

次の図の △ABC で，点 D は ∠BAC の二等分線と辺 BC との交点であるとき，x の値を求めなさい。

(1)



(2)



解答

(1)　AB : AC = BD : DC

$14 : 7 = 8 : x$

$14 \times x = 7 \times 8$

$14x = 56$

$x = \mathbf{4}$　**・・・(答)**

(2)　AB : AC = BD : DC

$10 : 15 = (15 - x) : x$

$10 \times x = 15 \times (15 - x)$

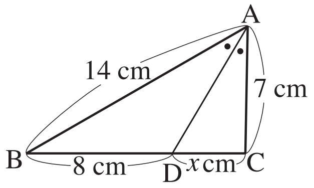
$10x = 225 - 15x$

$25x = 225$

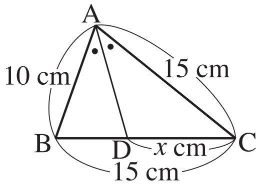
$x = \mathbf{9}$　**・・・(答)**

MEMO

(1)



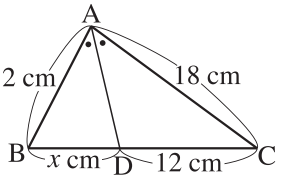
(2)



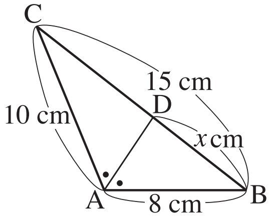
確認テスト 2

次の図の △ABC で，点 D は ∠BAC の二等分線と辺 BC との交点であるとき，x の値を求めなさい。

(1)



(2)

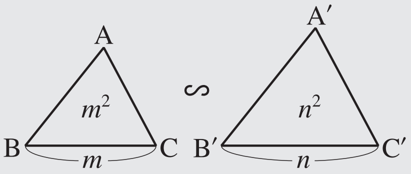


第33講・相似な図形と面積

例題1　相似な図形の面積の比①

ポイント

● 相似な2つの図形について，相似比が $m:n$ ならば，周の長さの比は $m:n$，
面積比は $m^2:n^2$ となる。

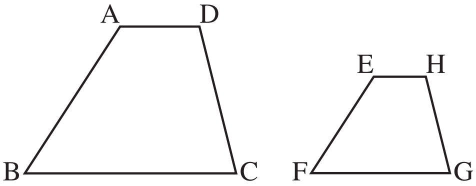


問題

右の図のように，相似比が 3 : 2 の台形 ABCD，台形 EFGH があるとき，次の問いに答えなさい。

(1)　台形 ABCD と台形 EFGH の面積比を求めなさい。

(2)　台形 EFGH の面積が 88 cm^2 のとき，台形 ABCD の面積を求めなさい。



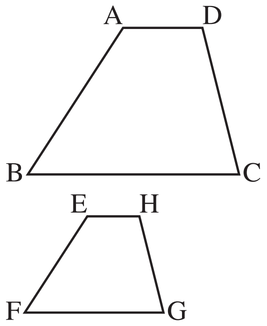
解答

(1)　台形 ABCD と台形 EFGH の相似比が 3 : 2 だから，面積比は

$3^2:2^2=$ **9 : 4**　…(答)

MEMO

(1)



⑵　台形 ABCD の面積を x cm^2 とすると，台形 ABCD と台形 EFGH の面積比は 9 : 4 だから

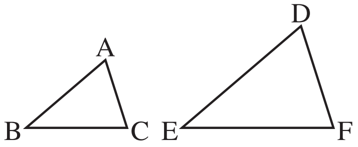
$$9 : 4 = x : 88$$
$$4 \times x = 9 \times 88$$
$$x = 88 \times \frac{9}{4}$$
$$= 198$$

よって

198 cm^2　…(答)

確認テスト 1

右の図のように，相似比が 3 : 5 の △ABC，△DEF があるとき，次の問いに答えなさい。

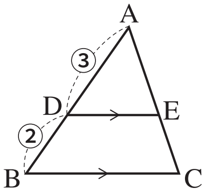


⑴　△ABC と △DEF の面積比を求めなさい。
⑵　△ABC の面積が 27 cm^2 のとき，△DEF の面積を求めなさい。

例題 2　相似な図形の面積の比②

問題

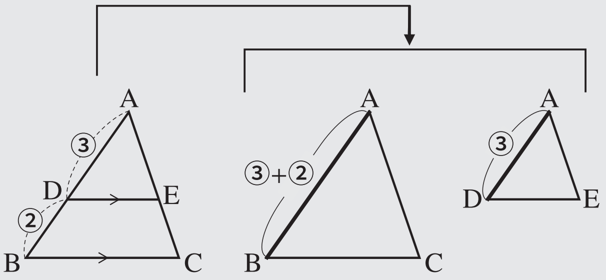
右の図のように，DE // BC，AD : DB = 3 : 2 の △ABC がある。このとき，次の問いに答えなさい。



⑴　△ABC と △ADE の面積比を求めなさい。
⑵　△ABC と四角形 DBCE の面積比を求めなさい。
⑶　△ABC の面積が 75 cm^2 のとき，四角形 DBCE の面積を求めなさい。

ポイント

● ピラミッド型の図形の面積比 → 対応する辺の比（相似比）から，2 つの三角形の面積比を求める



解 答

(1)　△ABC ∽ △ADE より，相似比は

AB : AD = 5 : 3

よって，△ABC と △ADE の面積比は

$5^2 : 3^2 =$ **25 : 9**　**・・・(答)**

(2)　△ABC と △ADE の面積比は 25 : 9 だから，△ABC と四角形 DBCE の面積比は

25 : (25 − 9) = **25 : 16**　**・・・(答)**

(3)　△ABC と四角形 DBCE の面積比は 25 : 16 だから，四角形 DBCE の面積を x cm^2 とすると

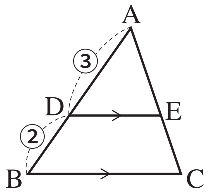
$$25 : 16 = 75 : x$$
$$25x = 16 \times 75$$
$$x = 16 \times \frac{75}{25}$$
$$= 48$$

よって

48 cm^2　**・・・(答)**

MEMO

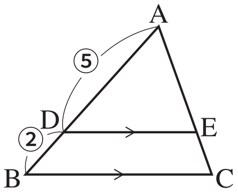
(2)



確認テスト 2

右の図のように，DE // BC，AD : DB = 5 : 2 の △ABC がある。このとき，次の問いに答えなさい。

(1)　△ABC と △ADE の面積比を求めなさい。
(2)　△ABC と四角形 DBCE の面積比を求めなさい。
(3)　△ABC の面積が 98 cm^2 のとき，四角形 DBCE の面積を求めなさい。

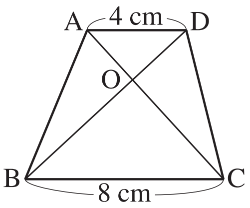


例題 3　相似な図形の面積の比③

問題

次の図で，四角形 ABCD は AD // BC の台形で，点 O は対角線 AC と BD との交点である。AD ＝ 4 cm，BC ＝ 8 cm，△OAD の面積が 6 cm^2 のとき，次の問いに答えなさい。

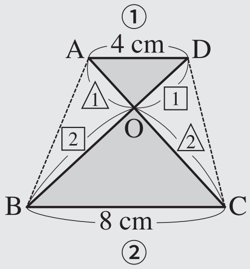
(1)　△OCB の面積を求めなさい。
(2)　△OAB の面積を求めなさい。



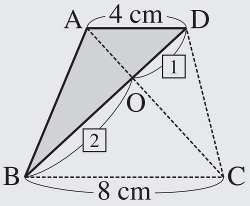
ポイント

● 台形の中にある図形の面積 → 相似な図形をみつけて，相似比を利用して求める

[1]　砂時計型
→ 面積比は相似比の 2 乗に等しい



[2]　底辺がつながった三角形
→ 面積比は底辺の比に等しい



解答

⑴　△OAD と △OCB の相似比は 1 : 2 だから，△OAD と △OCB の面積比は

$1^2 : 2^2 = 1 : 4$

したがって，△OCB の面積を x cm² とすると

△OAD : △OCB = 1 : 4

$6 : x = 1 : 4$

$x = 24$

よって

24 cm²　・・・(答)

⑵　△OAD と △OCB の相似比は 1 : 2 だから，△ABD について

OD : OB = 1 : 2

したがって，△OAB の面積を y cm² とすると

△OAD : △OAB = 1 : 2

$6 : y = 1 : 2$

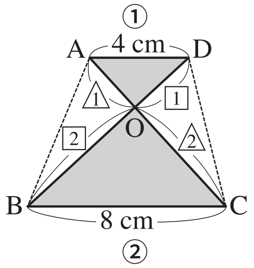
$y = 12$

よって

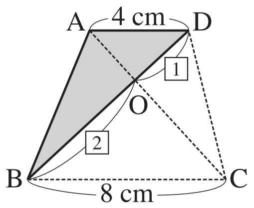
12 cm²　・・・(答)

MEMO

⑴



⑵

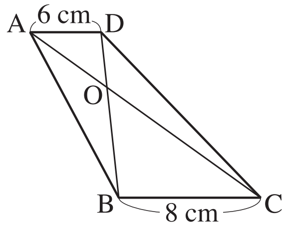


確認テスト 3

次の図で，四角形 ABCD は AD // BC の台形で，点 O は対角線 AC と BD との交点である。AD = 6 cm，BC = 8 cm，△OCB の面積が 32 cm² のとき，次の問いに答えなさい。

⑴　△OAD の面積を求めなさい。

⑵　△OCD の面積を求めなさい。



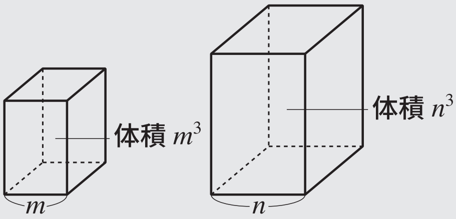
第34講・相似な立体と表面積・体積

例題 1　相似な立体の表面積・体積の比①

ポイント

- 1つの立体を，形を変えずに一定の割合で拡大，または縮小して得られる立体は，もとの立体と相似である

- 相似な2つの立体について，対応する部分の長さの比が $m : n$ ならば，相似比は $m : n$ となる。このとき，表面積と体積について次の比が成り立つ
  - 相似比 → $m : n$
  - 表面積比 → $m^2 : n^2$　（2乗）
  - 体積比 → $m^3 : n^3$　（3乗）

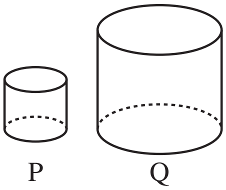


問題

右の図の円柱P，Qは相似である。円柱Pの底面の半径は5 cm，円柱Qの底面の半径は10 cmであるとき，次の問いに答えなさい。

(1)　円柱Pの表面積が130 cm² のとき，円柱Qの表面積を求めなさい。

(2)　円柱Pの体積が100 cm³ のとき，円柱Qの体積を求めなさい。



解答

(1)　2つの円柱の相似比は

$5 : 10 = 1 : 2$

したがって，表面積の比は

$1^2 : 2^2 = 1 : 4$

円柱Qの表面積を x cm² とすると

$130 : x = 1 : 4$

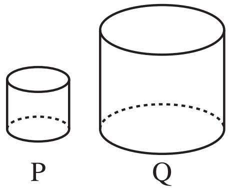
$x = 520$

よって

520 cm²　…(答)

MEMO

(1)



(2)　2 つの円柱の相似比は 1 : 2 だから，体積の比は

$1^3 : 2^3 = 1 : 8$

円柱 Q の体積を y cm³ とすると

$100 : y = 1 : 8$

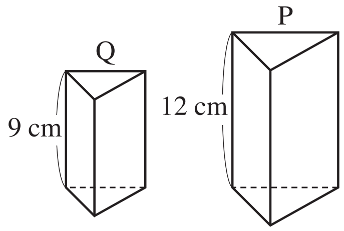
$y = 800$

よって

800 cm³　・・・(答)

確認テスト 1

右の図の三角柱 P，Q は相似である。三角柱 P の高さは 12 cm，三角柱 Q の高さは 9 cm であるとき，次の問いに答えなさい。



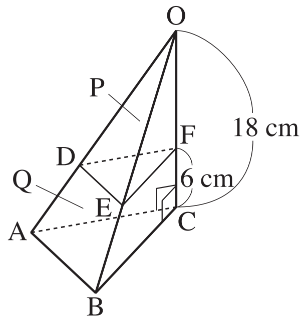
(1)　三角柱 P の表面積が 144 cm² のとき，三角柱 Q の表面積を求めなさい。

(2)　三角柱 Q の体積が 81 cm³ のとき，三角柱 P の体積を求めなさい。

例題 2　相似な立体の表面積・体積の比②

問題

次の図で，三角錐 O–ABC の高さは OC = 18 cm である。この三角錐 O–ABC を，右の図のように底面 ABC に平行な平面 DEF で，CF = 6 cm になるよう 2 つの立体 P，Q に切り分けた。すると，立体 P の体積は 200 cm³ になった。このとき，次の問いに答えなさい。

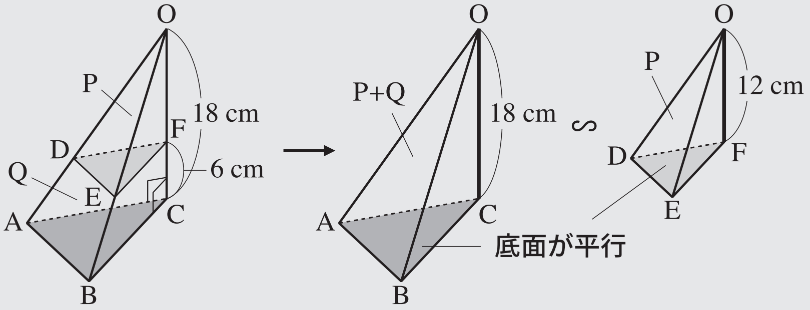


(1)　三角錐 O–ABC と立体 P の，表面積と体積の比をそれぞれ求めなさい。

(2)　立体 Q の体積を求めなさい。

ポイント

● 三角錐 O–ABC ∽ 三角錐 O–DEF だから，対応する辺の比から相似比を求める



解答

(1)　三角錐 O–ABC と立体 P は相似である。対応する辺 OC，OF の比は

$18 : (18-6) = 18 : 12$
$= 3 : 2$

したがって，相似比は 3 : 2 である。よって，表面積の比は

$3^2 : 2^2 =$ **$9 : 4$**　…(答)

また，体積の比は

$3^3 : 2^3 =$ **$27 : 8$**　…(答)

(2)　立体 Q は，三角錐 O–ABC から立体 P を切り取ったものである。三角錐 O–ABC と立体 P の体積比は 27 : 8 だから，立体 P と立体 Q の体積比は

$8 : (27-8) = 8 : 19$

したがって，立体 Q の体積を x cm^3 とすると

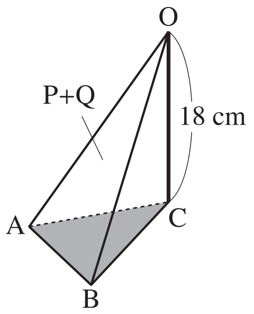
$200 : x = 8 : 19$
$8x = 200 \times 19$
$x = 475$

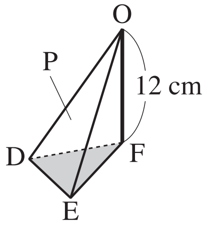
よって

475 cm^3　…(答)

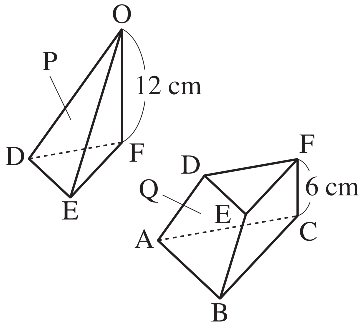
MEMO

(1)



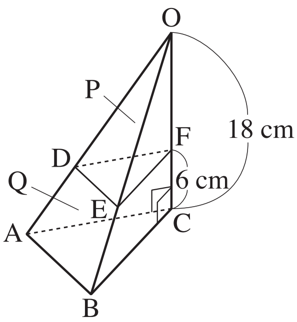


(2)



確認テスト 2

次の図で，三角錐 O–ABC の高さは OC = 18 cm である。この三角錐 O–ABC を，右の図のように底面 ABC に平行な平面 DEF で，CF = 6 cm になるよう 2 つの立体 P，Q に切り分けた。すると，立体 P の体積は 200 cm^3 になった。このとき，次の問いに答えなさい。



⑴ 三角錐 O–ABC と立体 P の，表面積と体積の比をそれぞれ求めなさい。

⑵ 立体 Q の体積を求めなさい。

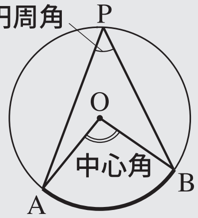
[メモ]

第35講・円周角の定理

例題 1　円周角の定理①

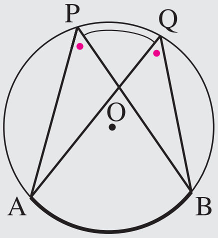
ポイント

● 円Oにおいて，右の図のように円周上に点Pをとるとき，∠APBを $\overset{\frown}{AB}$ に対する円周角（えんしゅうかく）という

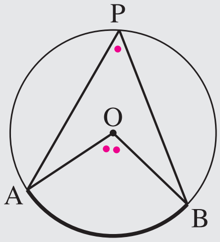


● 円周角の定理

1　同じ弧に対する円周角は等しい



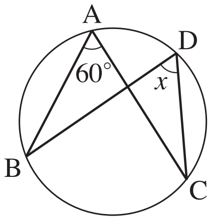
2　円周角は，その弧に対する中心角の半分である



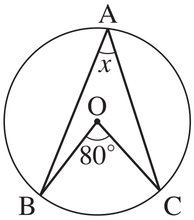
問題

次の図で，$\angle x$ の大きさを求めなさい。

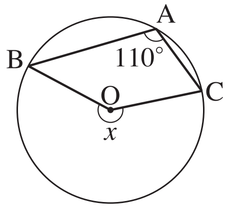
(1)



(2)



(3)



解答

(1) $\overset{\frown}{BC}$ に対する円周角は等しいので

$\angle x = \mathbf{60^\circ}$　**・・・(答)**

(2) 円周角は中心角の半分だから

$\angle x = 80^\circ \times \dfrac{1}{2}$

$= \mathbf{40^\circ}$　**・・・(答)**

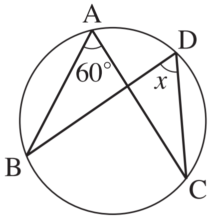
(3) 中心角は円周角の 2 倍だから

$\angle x = 110^\circ \times 2$

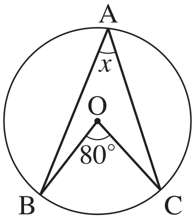
$= \mathbf{220^\circ}$　**・・・(答)**

MEMO

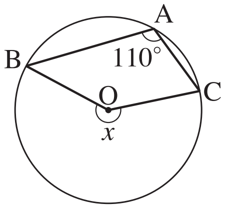
(1)



(2)



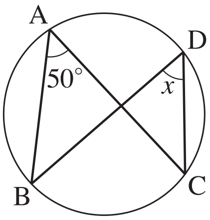
(3)



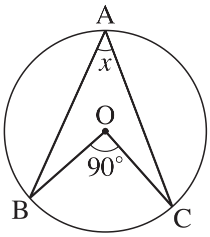
確認テスト 1

次の図で，$\angle x$ の大きさを求めなさい。

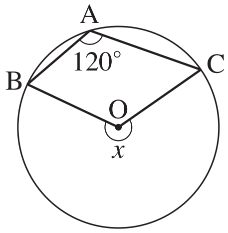
(1)



(2)



(3)

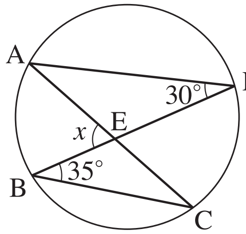


例題 2 円周角の定理②

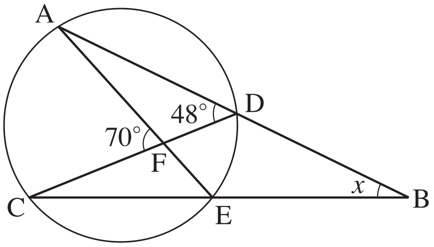
問題

次の図で，$\angle x$ の大きさを求めなさい。

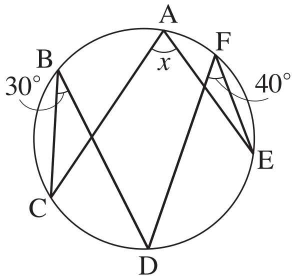
(1)



(2)



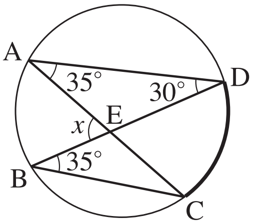
(3)



解答

MEMO

(1)



$\overset{\frown}{CD}$ に対する円周角は等しいので

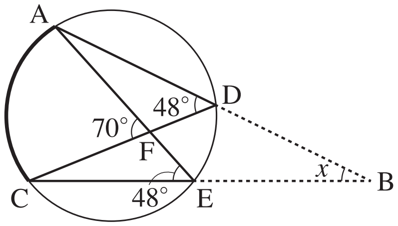
$\angle CAD = \angle CBD = 35°$

三角形の内角と外角の性質より

$35° + 30° = \angle x$

$\angle x = \mathbf{65°}$　…(答)

(2)



$\overset{\frown}{AC}$ に対する円周角は等しいので

$\angle AEC = \angle ADC = 48^\circ$

$\triangle AFD$ について，三角形の内角と外角の性質より

$\angle FAD + 48^\circ = 70^\circ$

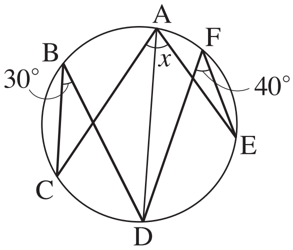
$\angle FAD = 22^\circ$

同様に，$\triangle AEB$ について

$\angle x + 22^\circ = 48^\circ$

$\angle x = \mathbf{26^\circ}$　**…(答)**

(3)



2 点 A，D を結ぶ。同じ弧に対する円周角は等しいので

$\angle x = \angle CAD + \angle DAE$

$= \angle CBD + \angle DFE$

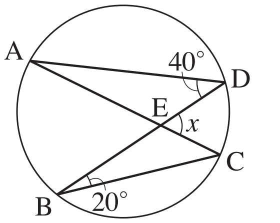
$= 30^\circ + 40^\circ$

$= \mathbf{70^\circ}$　**…(答)**

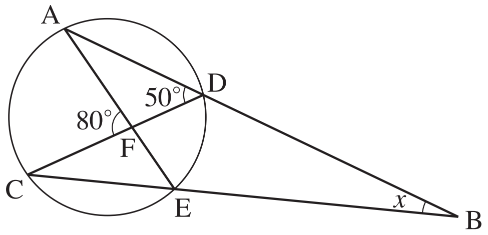
確認テスト 2

次の図で，$\angle x$ の大きさを求めなさい。

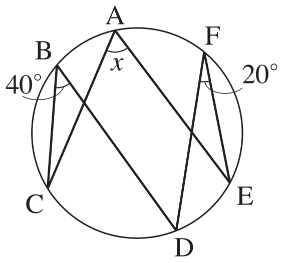
(1)



(2)



(3)



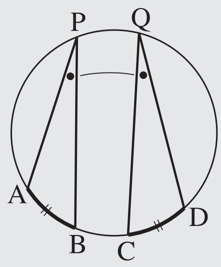
例題 3　弧の長さと円周角①

ポイント

● 1 つの円において，円周角と弧の間では次の関係が成り立つ

1　等しい円周角に対する弧の長さは等しい

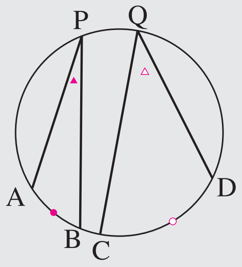
2　等しい長さの弧に対する円周角は等しい



● 1 つの円において，中心角の大きさと弧の長さは比例することから，円周角と弧の長さの間に次の比例式が成り立つ

$\angle APB : \angle CQD = \overset{\frown}{AB} : \overset{\frown}{CD}$

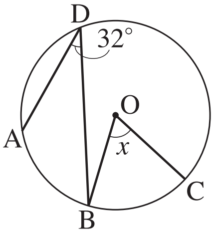
（▲　△　●　○）



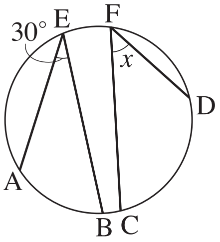
問題

次の問いに答えなさい。

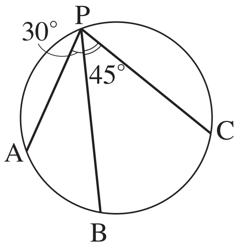
⑴　次の図について，$\overset{\frown}{\mathrm{AB}} = \overset{\frown}{\mathrm{BC}}$ のとき，$\angle x$ の大きさを求めなさい。



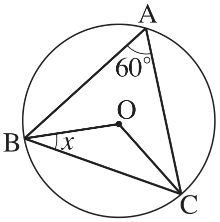
⑵　次の図について，$\overset{\frown}{\mathrm{AB}} = 6\ \mathrm{cm}$，$\overset{\frown}{\mathrm{CD}} = 9\ \mathrm{cm}$ のとき，$\angle x$ の大きさを求めなさい。



⑶　次の図について，$\overset{\frown}{\mathrm{AB}} = 14\ \mathrm{cm}$ のとき，$\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$ の長さを求めなさい。

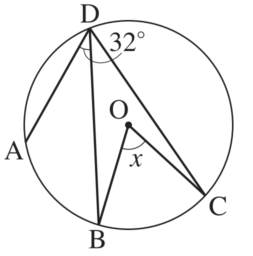


⑷　次の図について，$\angle x$ の大きさを求めなさい。



解答

(1)



$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC}$ より，等しい弧に対する円周角は等しいので

$\angle ADB = \angle BDC = 32°$

中心角は円周角の 2 倍だから

$\angle x = 32° \times 2$

$= \mathbf{64°}$　・・・(答)

(2) $\overset{\frown}{AB} = 6$ cm，$\overset{\frown}{CD} = 9$ cm より

$\angle AEB : \angle CFD = \overset{\frown}{AB} : \overset{\frown}{CD}$

$30° : \angle x = 6 : 9$

$\angle x \times 6 = 270°$

$\angle x = \mathbf{45°}$　・・・(答)

(3) $\overset{\frown}{AB} = 14$ cm より，$\overset{\frown}{BC}$ の長さを x cm とおくと

$\angle APB : \angle BPC = \overset{\frown}{AB} : \overset{\frown}{BC}$

$30° : 45° = 14 : x$

$30° \times x = 45° \times 14$

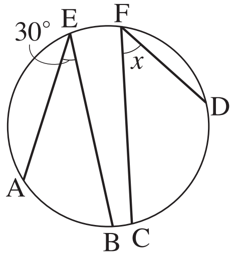
$x = 21$

よって

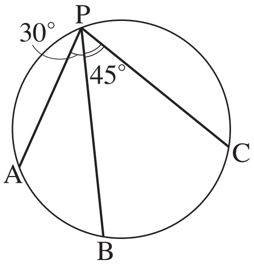
21 cm　・・・(答)

MEMO

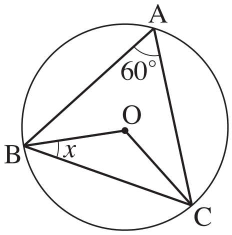
(2)



(3)



(4)



OB，OC はともに円 O の半径だから，△OBC は OB = OC の二等辺三角形である。したがって

$\angle OBC = \angle OCB = \angle x$

中心角は円周角の 2 倍だから

$\angle BOC = 60° \times 2$

$= 120°$

よって

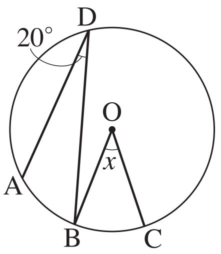
$\angle x = (180° - 120°) \div 2$

$= $ **30°**　…(答)

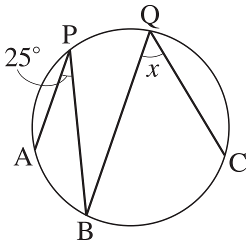
確認テスト 3

次の問いに答えなさい。

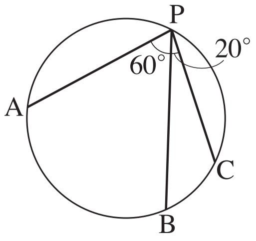
(1) 次の図について，$\overset{\frown}{\mathrm{AB}} = \overset{\frown}{\mathrm{BC}}$ のとき，$\angle x$ の大きさを求めなさい。



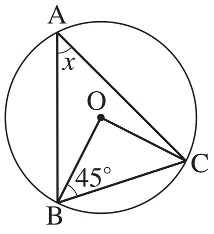
(2) 次の図について，$\overset{\frown}{\mathrm{AB}} = 4$ cm，$\overset{\frown}{\mathrm{BC}} = 8$ cm のとき，$\angle x$ の大きさを求めなさい。



(3) 次の図について，$\overset{\frown}{\mathrm{AB}} = 21$ cm のとき，$\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$ の長さを求めなさい。



(4) 次の図について，$\angle x$ の大きさを求めなさい。

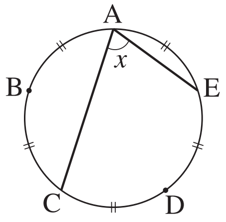


例題 4　弧の長さと円周角②

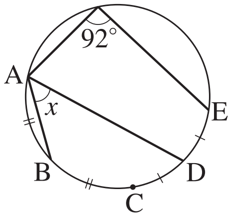
問題

次の図で，$\angle x$ の大きさを求めなさい。

(1) $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{DE} = \overset{\frown}{EA}$



(2) $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC}$，$\overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{DE}$

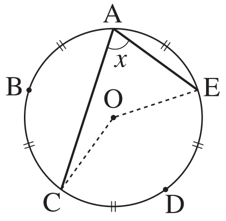


ポイント

● 弧の長さの関係が与えられている円 → 弧の長さの比と円周角（中心角）の大きさが比例することを利用して求める

解答

(1)



円の中心を O として，点 C，E と点 O をそれぞれ結ぶ。等しい弧に対する中心角の大きさは等しいので

$$\angle COE = 360^\circ \times \frac{2}{5}$$
$$= 144^\circ$$

円周角は中心角の半分だから

$$\angle x = 144^\circ \times \frac{1}{2}$$
$$= 72^\circ$$ …(答)

MEMO

(2)　$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC}$，$\overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{DE}$ より

$$\begin{aligned}\overset{\frown}{AE} &= \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{DE} \\ &= \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{CD} \\ &= 2(\overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD}) \\ &= 2\overset{\frown}{BD}\end{aligned}$$

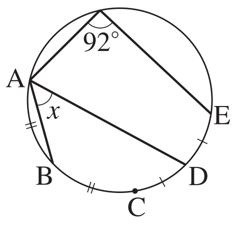
したがって，円周角の大きさと弧の長さは比例するので

$$92^\circ : \angle x = 2 : 1$$

$$2 \times \angle x = 92^\circ$$

$\angle x =$ **46°**　…(答)

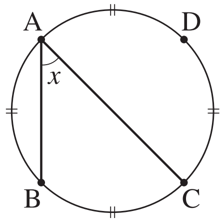
(2)



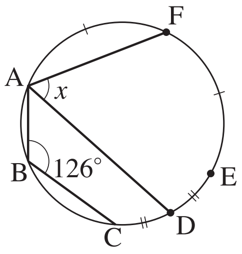
確認テスト 4

次の図で，$\angle x$ の大きさを求めなさい。

(1)　$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{DA}$



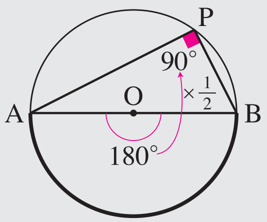
(2)　$\overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{DE}$，$\overset{\frown}{EF} = \overset{\frown}{FA}$



例題 5　直径と円周角

ポイント

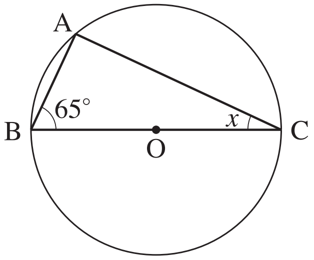
● 右の図のように，半円の弧に対する円周角は 90° となる



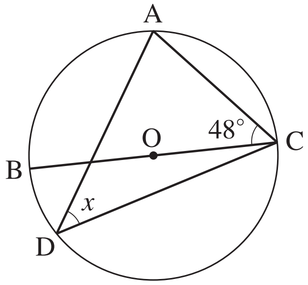
問題

次の図で，∠x の大きさを求めなさい。なお，点 O は円の中心とする。

(1)



(2)



解答

(1)　半円の弧に対する円周角は 90° だから

$\angle BAC = 90^\circ$

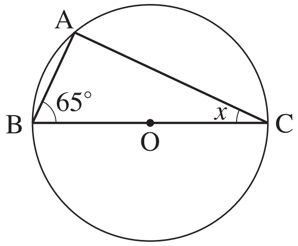
△ABC の内角の和は 180° だから

$\angle x = 180^\circ - 90^\circ - 65^\circ$

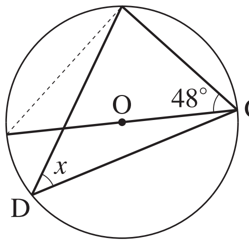
$= \mathbf{25^\circ}$　…**(答)**

MEMO

(1)



(2)



2 点 A，B を結ぶと，半円の弧に対する円周角は 90° だから

$\angle BAC = 90°$

$\triangle ABC$ の内角の和は 180° だから

$\angle ABC = 180° - 90° - 48°$

$= 42°$

等しい弧に対する円周角は等しいので

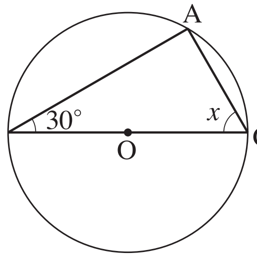
$\angle x = \angle ABC$

$= \mathbf{42°}$ ・・・(答)

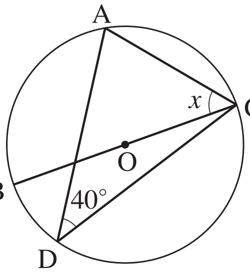
確認テスト 5

次の図で，$\angle x$ の大きさを求めなさい。なお，点 O は円の中心とする。

(1)



(2)

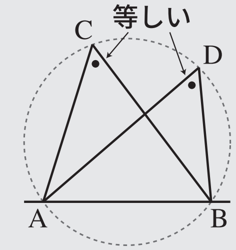


第 36 講・円周角の定理の逆

例題 1　円周角の定理の逆①

ポイント

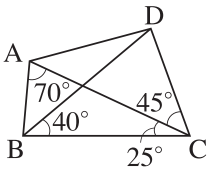
● 4 点 A，B，C，D の，C，D が直線 AB について同じ側にあるとき，**∠ACB = ∠ADB ならば，4 点は 1 つの円周上**にある。



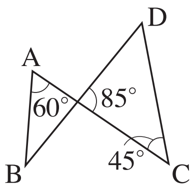
問題

次の①～③の図で，4 点 A，B，C，D が 1 つの円周上にあるものを，**すべて**選びなさい。

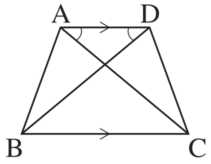
①



②



③　AD // BC，∠CAD = ∠BDA



解答

①　△BCD について

∠BDC = 180° − ∠CBD − ∠BCD

= 180° − 40° − 70°

= 70°

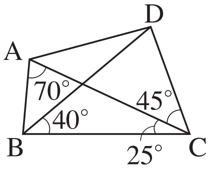
したがって

∠BAC = ∠BDC

A，D が直線 BC について同じ側にあるので，4 点 A，B，C，D は 1 つの円周上にある。

MEMO

①



② 線分 AC，BD が交わる点を O とする。

△OCD について

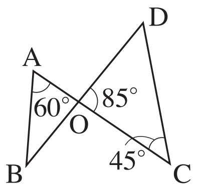
$\angle ODC = 180^\circ - \angle OCD - \angle COD$

$= 180^\circ - 45^\circ - 85^\circ$

$= 50^\circ$

したがって，∠BAC と ∠BDC は等しくないので，4 点 A，B，C，D は同じ円周上にない。

②



③ AD // BC より，平行線の錯角は等しいので

$\angle BCA = \angle CAD$

したがって

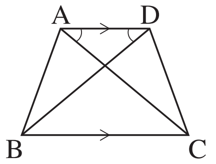
$\angle BCA = \angle BDA$

C，D が直線 AB について同じ側にあるので，4 点 A，B，C，D は同じ円周上にある。

よって

①，③ …(答)

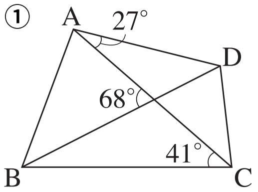
③



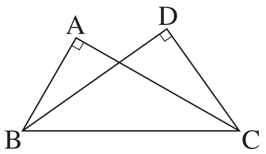
確認テスト 1

次の①～③の図で，4 点 A，B，C，D が同じ円周上にあるものを，**すべて**選びなさい。

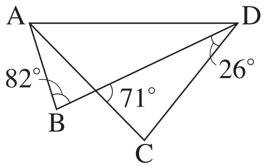
①



②



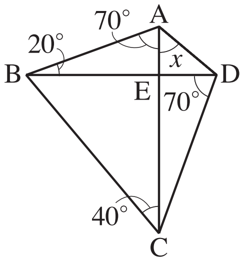
③



例題 2 円周角の定理の逆②

問題

右の図で，∠x の大きさを求めなさい。



ポイント

- ∠BAC = ∠BDC だから，円周角の定理の逆より 4 点 A，B，C，D は 1 つの円周上にある
  → これを利用して ∠x の大きさを求める

解答

∠BAC ＝ ∠BDC より，4 点 A，B，C，D は 1 つの円周上にある。よって

∠ADB = ∠ACB

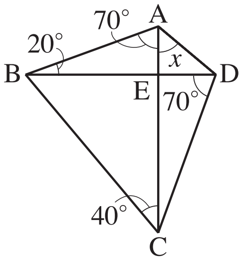
= 40°

△ABD の内角の和は 180° だから

∠x = 180° − 70° − 20° − 40°

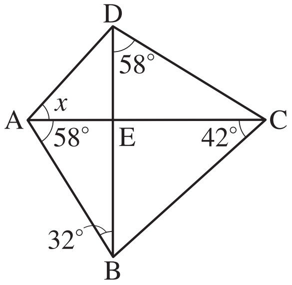
= **50°**　・・・(答)

MEMO



確認テスト 2

右の図で，∠x の大きさを求めなさい。

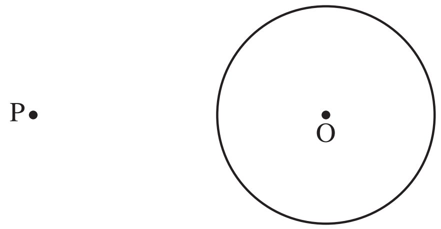


第 37 講・円周角の定理の利用

例題 1　円に関する作図

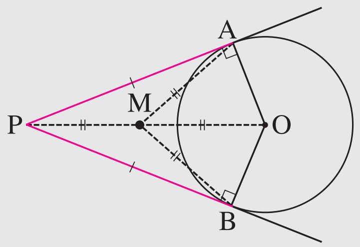
問題

右の図で，円 O の外の点 P を通る円 O の接線を作図しなさい。



ポイント

● 円外の 1 点から，円の接線は 2 本ひくことができる。
このとき，円の中心と接点を結んだ直線は，接線と垂直である
→ 2 つの接点を A，B とすると，
$\angle PAO = \angle PBO = 90°$
だから，2 点 A，B は OP を直径とする円の周上にある
→ OP を直径とする円の中心を M とすると，M は線分 OP の中点なので，OP と OP の垂直二等分線の交点である



解答

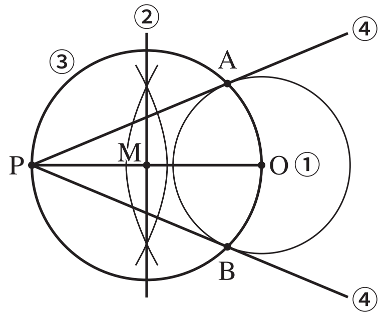
次の手順で作図する。

① 点 O と点 P を結ぶ。

② 線分 OP の垂直二等分線をかき，線分 OP との交点を M とする。

③ 半径が線分 MO と等しく，点 M を中心とする円をかく。円 O と③の円の交点をそれぞれ点 A，B とする。

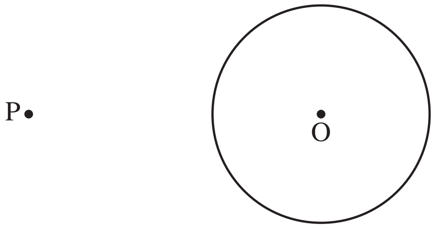
④ 点 P から点 A，B に向けて，半直線 PA，PB をひく。



MEMO

確認テスト 1

右の図で，円 O の外の点 P を通る円 O の接線を作図しなさい。



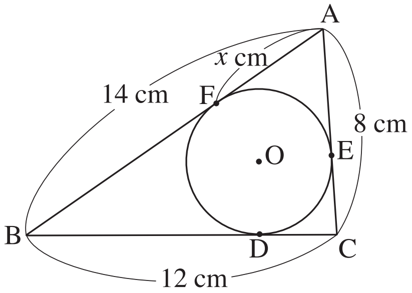
例題 2　円と接線の応用問題

問題

右の図のように，△ABC の各辺に点 D，E，F で接する円 O がある。AF = x cm として，次の問いに答えなさい。

(1) BF，CE の長さをそれぞれ x を使って表しなさい。

(2) x の値を求めなさい。



ポイント

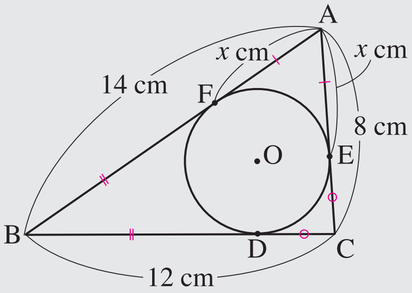
● 各辺で円 O と接する三角形 → 円外の 1 点からひいた 2 本の接線の長さは等しい
ことを利用して，線分の長さを求める

右の図で，点 A から円 O にひいた 2 本の接線の長さは等しいから，

AE = AF

点 B，点 C から円 O にひいた接線についても，それぞれ同様に考えて，

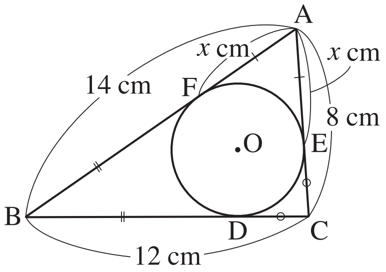
BD = BF，CD = CE



解答

MEMO

(1)



BF = AB − AF
　= **14 − x（cm）**　…(答)

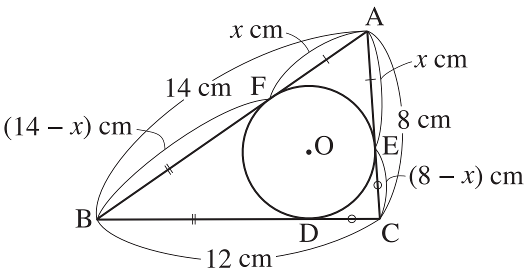
点 A から円 O にひいた 2 本の接線の長さは等しいから，

AE = AF = x（cm）

よって

CE = AC − AE
　= **8 − x（cm）**　…(答)

(2)



点 B から円 O にひいた 2 本の接線の長さは等しいから，

$BD = BF = 14 - x$（cm）　…①

点 C から円 O にひいた 2 本の接線の長さは等しいから，

$CD = CE = 8 - x$（cm）　…②

①，②より

$BC = BD + CD$

$12 = (14 - x) + (8 - x)$

$2x = 10$

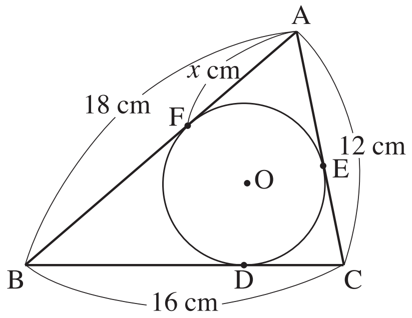
$x = \mathbf{5}$　…**(答)**

確認テスト 2

右の図のように，△ABC の各辺に点 D，E，F で接する円 O がある。AF = x cm として，次の問いに答えなさい。

(1) BF，CE の長さをそれぞれ x を使って表しなさい。

(2) x の値を求めなさい。



例題 3　円と相似

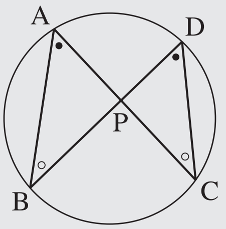
ポイント

● 右の図のように，点 A と点 B，点 C と点 D を結び，2 つの弦 AC，BD が円内の点 P で交わるとき

$\triangle ABP \backsim \triangle DCP$

となる。このとき，次のように各辺の比が成り立つ。

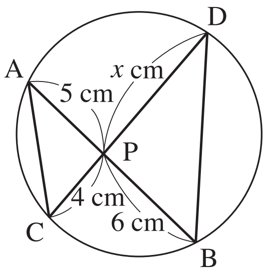
$AP : DP = BP : CP = AB : DC$



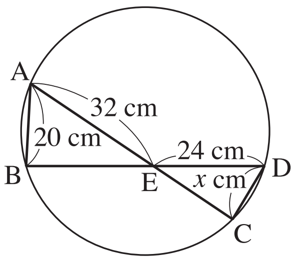
問題

次の図で，x の値を求めなさい。

(1)



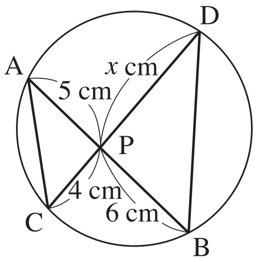
(2)



解答

MEMO

(1)



$\triangle ACP \backsim \triangle DBP$ より

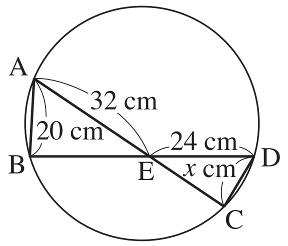
$AP : DP = CP : BP$

$5 : x = 4 : 6$

$4x = 30$

$x = \mathbf{\frac{15}{2}}$　…(答)

(2)



△ABE ∽ △DCE より

AB : DC = AE : DE

$20 : x = 32 : 24$

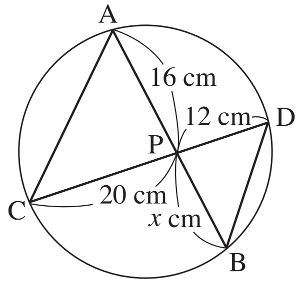
$32x = 480$

$x =$ **15**　…(答)

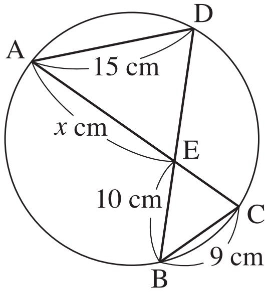
確認テスト 3

次の図で，x の値を求めなさい。

(1)



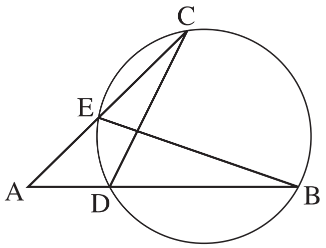
(2)



例題 4　円と相似の証明

問題

右の図で，ある円に対して円外の点 A から，円周上の点 B，C を通る直線をひいて，円との交点をそれぞれ点 D，E とする。△ABE ∽ △ACD を証明するとき，空欄 (1) ～ (3) を埋めなさい。



【証明】

△ABE と △ACD において，$\overset{\frown}{ED}$ に対する円周角は等しいので

∠ABE = (1) …①

また

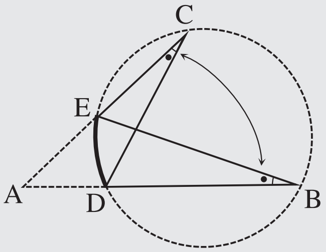
(2) …②

①，②より，(3) から

△ABE ∽ △ACD　**（証明終）**

ポイント

● 同じ弧に対する円周角は等しいことを利用して相似を証明する



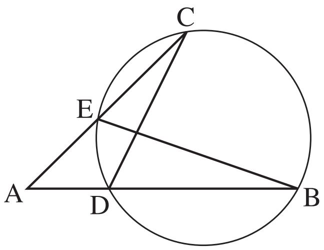
解答

(1)　∠ACD

(2)　∠A は共通

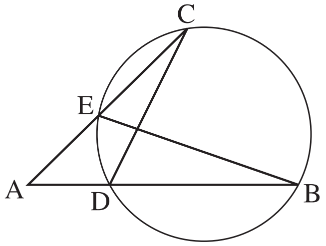
(3)　2 組の角がそれぞれ等しい

MEMO



確認テスト 4

右の図で，ある円に対して円外の点 A から，円周上の点 B，C を通る直線をひいて，円との交点をそれぞれ点 D，E とする。△ABE ∽ △ACD を証明するとき，空欄 (1) ～ (3) を埋めなさい。



【証明】

△ABE と △ACD おいて，$\overset{\frown}{ED}$ に対する円周角は等しいので

∠ABE = [(1)] …①

また

[(2)] …②

①，②より，[(3)] から

△ABE ∽ △ACD　**（証明終）**

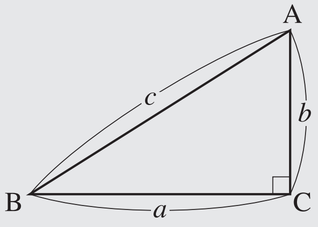
第 38 講・三平方の定理

例題 1　三平方の定理

ポイント

● 三平方(さんへいほう)の定理 ： 直角三角形の直角をはさむ 2 辺の長さを a，b，斜辺の長さを c とすると，次の関係が成り立つ。

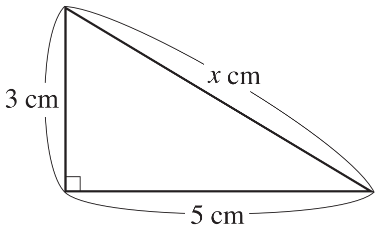
$$a^2 + b^2 = c^2$$



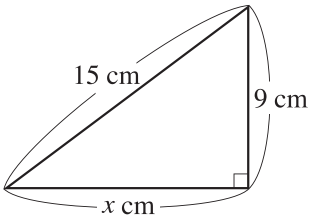
問 題

次の図で，x の値を求めなさい。

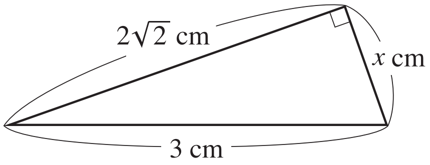
(1)



(2)



(3)



解 答

(1)　$3^2 + 5^2 = x^2$

$x^2 = 9 + 25$

$x^2 = 34$

$x > 0$ だから

$x = \sqrt{34}$　…(答)

MEMO

(2)　$x^2 + 9^2 = 15^2$

$x^2 = 225 - 81$

$x^2 = 144$

$x > 0$ だから

$x = \mathbf{12}$　**…(答)**

(3)　$x^2 + (2\sqrt{2})^2 = 3^2$

$x^2 = 9 - 8$

$x^2 = 1$

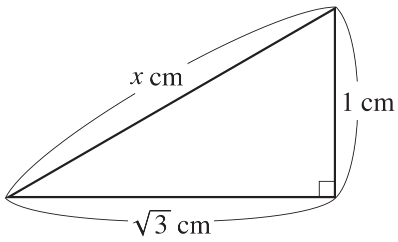
$x > 0$ だから

$x = \mathbf{1}$　**…(答)**

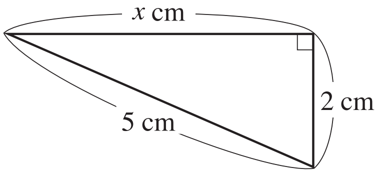
確認テスト 1

次の図で，x の値を求めなさい。

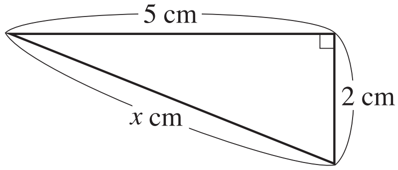
(1)



(2)



(3)



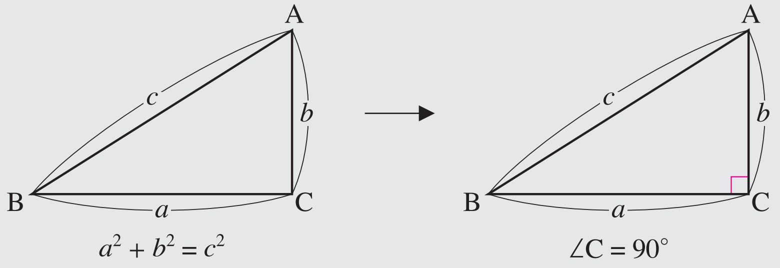
例題 2　三平方の定理の逆

ポイント

● 三平方の定理の逆 ： 3 辺の長さが a，b，c である三角形において

$$a^2 + b^2 = c^2$$

の関係が成り立つとき，この三角形は，長さ c の辺を斜辺とする直角三角形である。



問題

次の長さを 3 辺とする三角形が直角三角形であるものには○，そうでないものには×と答えなさい。

(1) $\sqrt{3}$ cm，2 cm，$\sqrt{7}$ cm

(2) 2 cm，3 cm，4 cm

解答

(1) もっとも長い辺が $\sqrt{7}$ cm なので，$a = \sqrt{3}$，$b = 2$，$c = \sqrt{7}$ とすると

$$a^2 + b^2 = (\sqrt{3})^2 + 2^2$$
$$= 3 + 4$$
$$= 7$$
$$c^2 = (\sqrt{7})^2$$
$$= 7$$

よって，$a^2 + b^2 = c^2$ が成り立つから

○　…(答)

MEMO

⑵　もっとも長い辺が 4 cm なので，$a = 2$，$b = 3$，$c = 4$ とすると

$$a^2 + b^2 = 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$$

$$c^2 = 4^2 = 16$$

よって，$a^2 + b^2 = c^2$ が成り立たないから

×　…(答)

確認テスト 2

次の長さを 3 辺とする三角形が直角三角形であるものには○，そうでないものには×と答えなさい。

⑴　$\sqrt{5}$ cm，$\sqrt{6}$ cm，$\sqrt{7}$ cm

⑵　$\sqrt{5}$ cm，$2\sqrt{5}$ cm，5 cm

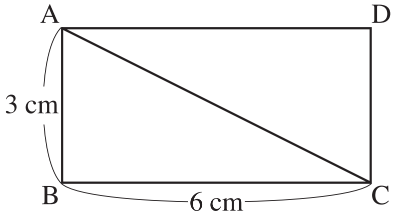
第39講・特別な直角三角形

例題 1　長方形の対角線の長さ・三角形の高さ

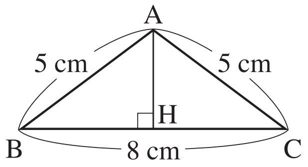
問題

次の問いに答えなさい。

(1)　次の図の長方形 ABCD の対角線の長さを求めなさい。



(2)　次の図の △ABC について，高さ AH と面積を求めなさい。



解答

(1)　AC ＝ x cm とする。∠B ＝ 90° だから，△ABC について

$$x^2 = 3^2 + 6^2$$
$$= 9 + 36$$
$$= 45$$

$x > 0$ だから

$$x = 3\sqrt{5}$$

よって

$3\sqrt{5}$ cm　…(答)

MEMO

⑵　AH = x cm とすると，△ABH ≡ △ACH より，
BH = 4 cm だから

$$4^2 + x^2 = 5^2$$
$$x^2 = 25 - 16$$
$$x^2 = 9$$

$x > 0$ だから

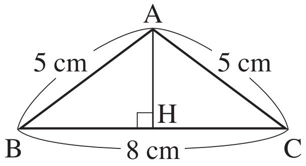
$$x = 3$$

よって

AH = **3 cm**　…（答）

したがって，求める面積は

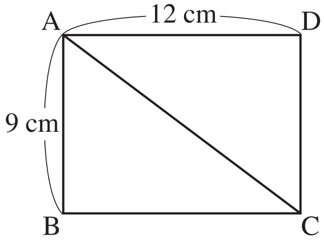
$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times 8 \times 3$$
$$= \mathbf{12\ (cm^2)}$$　…（答）



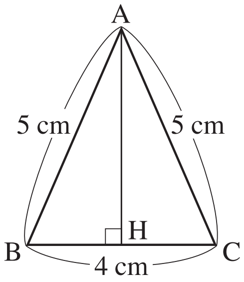
確認テスト 1

次の問いに答えなさい。

⑴　次の図の長方形 ABCD の対角線の長さを求めなさい。



⑵　次の図の △ABC について，高さ AH と面積を求めなさい。

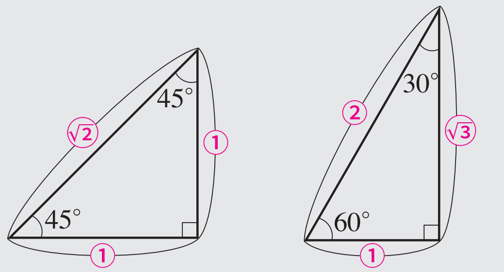


例題 2 特別な直角三角形

ポイント

● 特別な直角三角形：次のような角度をもつ直角三角形の辺の比は以下のようになる。

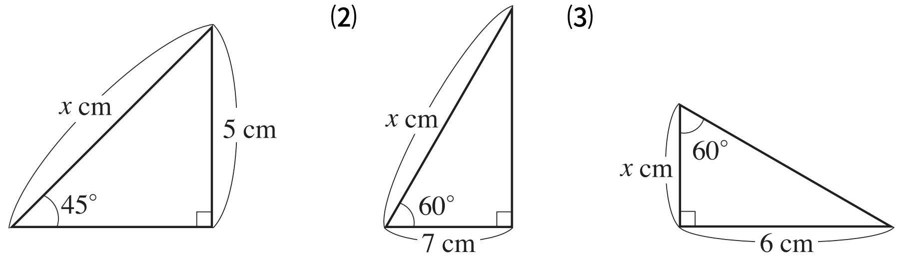
1　90°，45°，45°　　2　90°，30°，60°



問題

次の図で，x の値を求めなさい。

(1)　(2)　(3)



解答

(1)　$x : 5 = \sqrt{2} : 1$

$x = \mathbf{5\sqrt{2}}$　**…(答)**

(2)　$x : 7 = 2 : 1$

$x = \mathbf{14}$　**…(答)**

(3)　$x : 6 = 1 : \sqrt{3}$

$\sqrt{3}x = 6$

$x = \dfrac{6}{\sqrt{3}}$

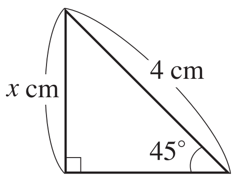
$x = \mathbf{2\sqrt{3}}$　**…(答)**

MEMO

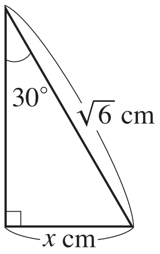
確認テスト 2

次の図で，x の値を求めなさい。

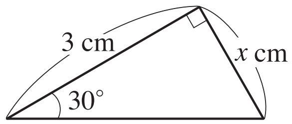
(1)



(2)



(3)



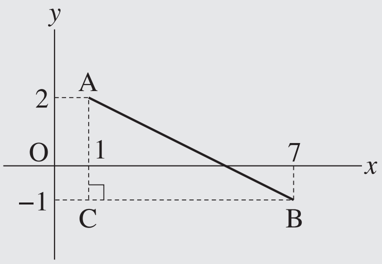
第 40 講・三平方の定理と平面図形

例題 1　座標平面上の 2 点間の距離

ポイント

● 座標平面上の 2 点の間の距離
→ 長さを求めたい線分を斜辺にもつ直角三角形を利用する

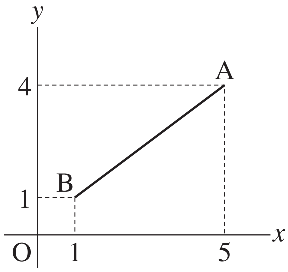
（例）2 点 A(1，2)，B(7，– 1) の間の距離
→ 右の図のように，直角三角形 ACB をつくると
AC = 3，BC = 6 だから，AB = $3\sqrt{5}$



問題

次の 2 点 A，B の間の距離を求めなさい。

(1)

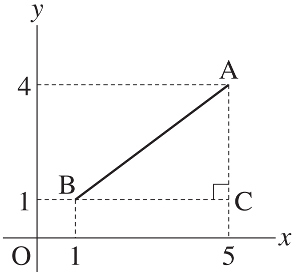


(2)　A(3，5)，B(−1，1)

解答

MEMO

(1)



上の図のように，直角三角形 ABC をつくると

$BC = 5 - 1$
$= 4$
$AC = 4 - 1$
$= 3$

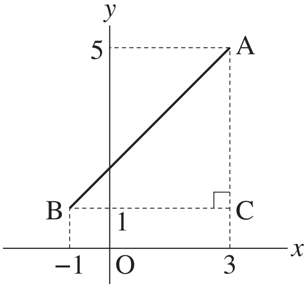
よって

$AB^2 = 4^2 + 3^2$
$= 16 + 9$
$= 25$

$AB > 0$ なので

$AB = \mathbf{5}$　**…(答)**

(2)



上の図のように，直角三角形 ABC をつくると

$BC = 3 - (-1)$
$= 4$
$AC = 5 - 1$
$= 4$

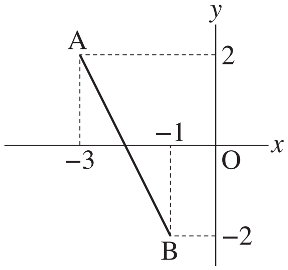
よって，△ABC は AC = BC の直角二等辺三角形だから

$AB : AC = \sqrt{2} : 1$
$AB : 4 = \sqrt{2} : 1$
$AB = \mathbf{4\sqrt{2}}$　**…(答)**

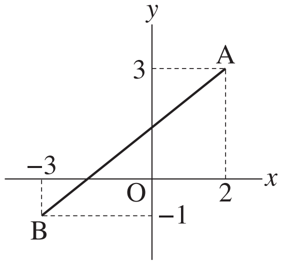
確認テスト 1

次の 2 点 A，B の間の距離を求めなさい。

(1)



(2)



(3) A(−3，1)，B(2，− 4)

例題 2 座標平面上の三角形

問題

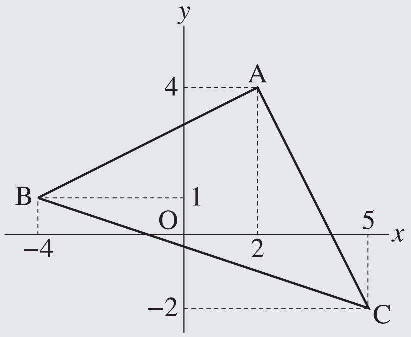
座標平面上に 3 点 A(2，4)，B(−4，1)，C(5，− 2) がある。このとき，次の問いに答えなさい。

(1) 2 点 A，B の間の距離を求めなさい。

(2) △ABC はどんな三角形か答えなさい。

ポイント

● 座標平面上の三角形がどのような三角形か調べる
→ 三平方の定理を利用して，各辺の長さを求める。
求めた辺の長さから，その三角形が
・直角三角形
・二等辺三角形（または正三角形）
に当てはまるかどうか考える。



解答

(1)　2 点 A，B の x 座標，y 座標の差はそれぞれ

$2-(-4)=6$

$4-1=3$

よって

$$\begin{aligned} AB^2 &= 6^2+3^2 \\ &= 36+9 \\ &= 45 \end{aligned}$$

$AB>0$ なので

$AB = \mathbf{3\sqrt{5}}$　**…(答)**

(2)　(1)と同様にして，BC，AC の長さを求める。2 点 B，C の x 座標，y 座標の差はそれぞれ

$5-(-4)=9$

$1-(-2)=3$

よって

$$\begin{aligned} BC^2 &= 9^2+3^2 \\ &= 81+9 \\ &= 90 \end{aligned}$$

$BC>0$ なので

$BC=3\sqrt{10}$

2 点 A，C の x 座標，y 座標の差はそれぞれ

$5-2=3$

$4-(-2)=6$

よって

$$\begin{aligned} AC^2 &= 3^2+6^2 \\ &= 9+36 \\ &= 45 \end{aligned}$$

$AC>0$ なので

$AC=3\sqrt{5}$

したがって

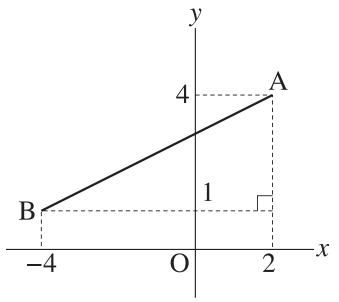
$$\begin{aligned} AB:AC:BC &= 3\sqrt{5}:3\sqrt{5}:3\sqrt{10} \\ &= 1:1:\sqrt{2} \end{aligned}$$

だから

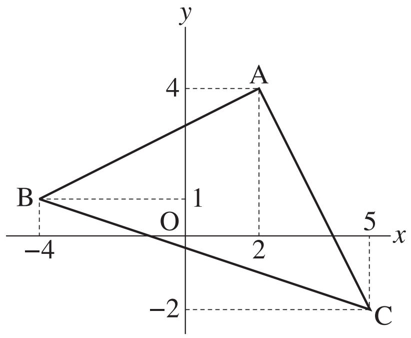
$\angle A=90^\circ$ の直角二等辺三角形　…(答)

MEMO

(1)



(2)



確認テスト 2

座標平面上に 3 点 A(5，2)，B(1，5)，C(−5，− 3) がある。このとき，次の問いに答えなさい。

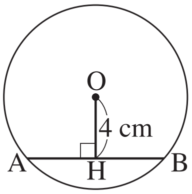
(1)　2 点 A，B の間の距離を求めなさい。

(2)　△ABC はどんな三角形か答えなさい。

例題 3　三平方の定理と円①

問題

右の図のような半径 6 cm の円 O で，中心からの距離 OH が 4 cm である弦 AB の長さを求めなさい。



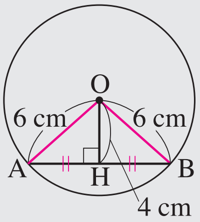
ポイント

● 点 O と A，点 O と B をそれぞれ結び，2 つの直角三角形 OAH，OBH をつくると

　　△OAH ≡ △OBH

対応する辺の長さは等しいので，AH = BH となる。

→ 直角三角形 OAH に着目して AH の長さを求める。



解答

点 O と A を結ぶ。直角三角形 OAH に着目すると

$$AH^2 + OH^2 = OA^2$$
$$AH^2 + 4^2 = 6^2$$
$$AH^2 = 36 - 16$$
$$AH^2 = 20$$

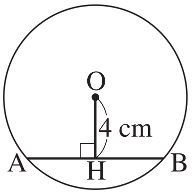
AH > 0 なので

$$AH = 2\sqrt{5}\ \text{cm}$$

点 H は弦 AB の中点なので

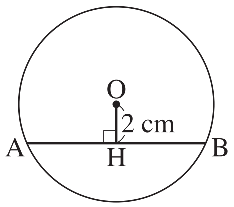
$$AB = 2AH$$
$$= 2 \times 2\sqrt{5}$$
$$= \mathbf{4\sqrt{5}}\ \textbf{(cm)}$$ …(答)

MEMO



確認テスト 3

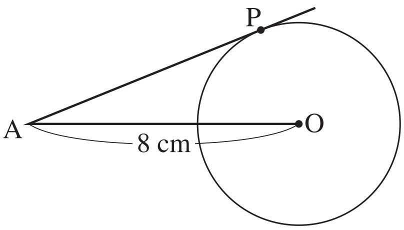
右の図のような半径 5 cm の円 O で，中心からの距離 OH が 2 cm である弦 AB の長さを求めなさい。



例題 4　三平方の定理と円②

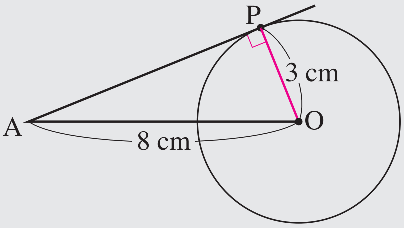
問題

右の図で，直線 AP は円 O の接線で，点 P は接点である。円の半径が 3 cm，AO ＝ 8 cm のとき，線分 AP の長さを求めなさい。



ポイント

- 点 O と P を結ぶと，円の接線と，接点を通る半径は垂直なので，∠APO ＝ 90° である。OP ＝ 3 cm だから，直角三角形 OAP に着目して AP の長さを求める。



解答

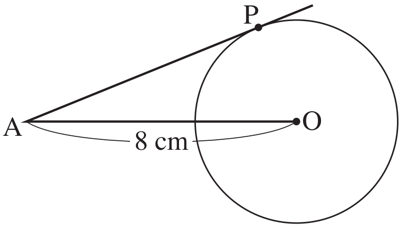
点 O と P を結ぶと，△OAP は ∠APO ＝ 90° の直角三角形だから

$$AP^2 + OP^2 = OA^2$$
$$AP^2 + 3^2 = 8^2$$
$$AP^2 = 64 - 9$$
$$AP^2 = 55$$

AP ＞ 0 なので

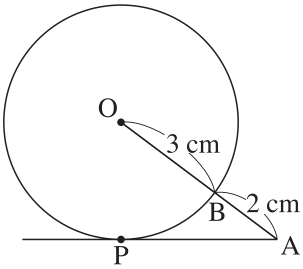
$AP = \sqrt{55}$ cm　…(答)

MEMO



確認テスト 4

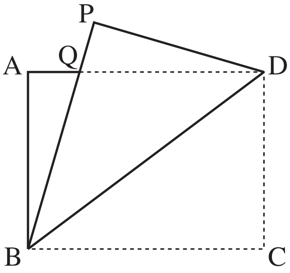
右の図で，直線 AP は円 O の接線で，点 P は接点である。また，円 O と線分 OA の交点を B とする。OB ＝ 3 cm，AB ＝ 2 cm のとき，線分 AP の長さを求めなさい。



例題 5　三平方の定理と図形の折り返し

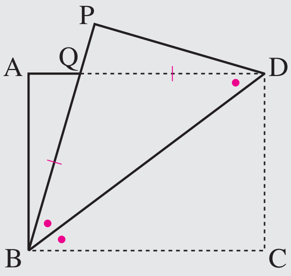
問題

右の図は，AB ＝ 12 cm，BC ＝ 16 cm の長方形 ABCD を対角線 BD を折り目として折り曲げたものである。線分 BQ の長さを求めなさい。



ポイント

● もとの角と折り返した角は等しいから，∠PBD ＝ ∠CBD。
AD // BC より，平行線の錯角は等しいので，∠QDB ＝ ∠CBD
→ ∠PBD ＝ ∠QDB，つまり ∠QBD ＝ ∠QDB となる
→ 2 つの角が等しいので，△QBD は QB ＝ QD の二等辺三角形である



● QB ＝ QD ＝ x cm とおくと
AQ ＝ AD − QD
＝ 16 − x（cm）
と表せるので，直角三角形 AQB に三平方の定理を適用する。

解答

もとの角と折り返した角は等しいから

$\angle PBD = \angle CBD$ …①

AD // BC より，平行線の錯角は等しいので

$\angle QDB = \angle CBD$ …②

①，②より

$\angle PBD = \angle QDB$

よって，$\angle QBD = \angle QDB$ だから，2 つの角が等しいので △QBD は QB = QD の二等辺三角形である。

QB = QD = x cm とおくと

$$AQ = AD - QD$$
$$= 16 - x \text{ (cm)}$$

と表せるので，直角三角形 ABQ に着目すると

$$12^2 + (16 - x)^2 = x^2$$
$$144 + 256 - 32x + x^2 = x^2$$
$$-32x = -400$$
$$x = \frac{25}{2}$$

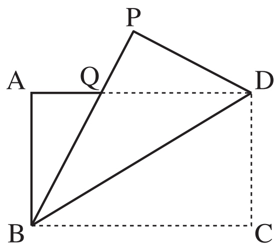
よって

$BQ = \mathbf{\frac{25}{2}}$ **cm** …**(答)**

MEMO

確認テスト 5

右の図は，AB = 6 cm，BC = 10 cm の長方形 ABCD を対角線 BD を折り目として折り曲げたものである。線分 BQ の長さを求めなさい。



[メモ]

第 41 講・三平方の定理と空間図形

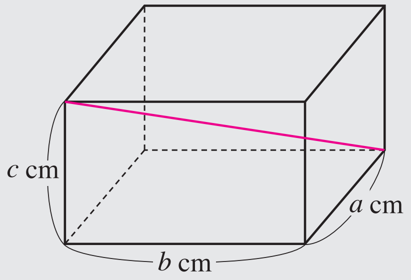
例題 1　直方体の対角線の長さ

ポイント

● 縦，横，高さがそれぞれ a cm，b cm，c cm の直方体の対角線の長さは

$\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ cm

である。



計算のしくみ

　右の図のように底面の対角線をひき，その長さを x cm とすると

$x^2 = a^2 + b^2$

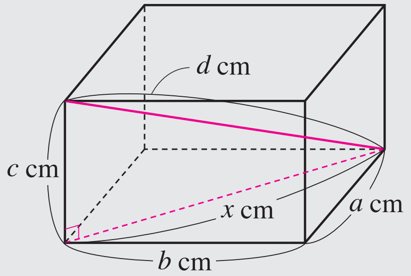
よって，直方体の対角線の長さを d cm とすると

$d^2 = x^2 + c^2$

$\quad = a^2 + b^2 + c^2$

$d > 0$ なので

$d = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$

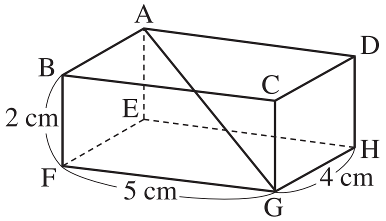


問題

　次の問いに答えなさい。

(1)　右の図の直方体の対角線 AG の長さを求めなさい。

(2)　1 辺の長さが 3 cm の立方体の対角線の長さを求めなさい。



解答

(1)　直方体の縦，横，高さはそれぞれ 4 cm，5 cm，2 cm だから，求める対角線 AG の長さは

$\sqrt{4^2+5^2+2^2}=\sqrt{45}$

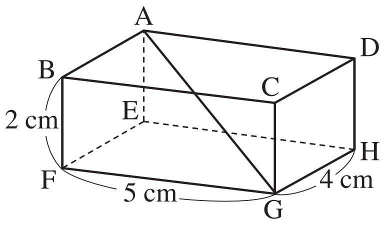
$=\mathbf{3\sqrt{5}}$ **(cm)**　…**(答)**

(2)　立方体のすべての辺の長さは 3 cm だから，求める対角線の長さは

$\sqrt{3^2+3^2+3^2}=\sqrt{27}$

$=\mathbf{3\sqrt{3}}$ **(cm)**　…**(答)**

MEMO

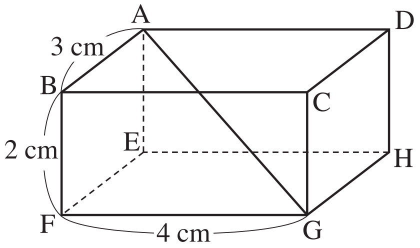


確認テスト 1

次の問いに答えなさい。

(1)　右の図の直方体の対角線 AG の長さを求めなさい。

(2)　1 辺の長さが 2 cm の立方体の対角線の長さを求めなさい。



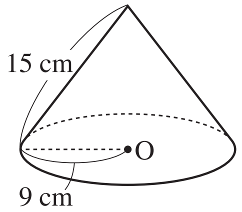
例題 2　円錐の体積

問題

右の図のように，底面の半径が 9 cm，母線が 15 cm の円錐がある。このとき，次の問いに答えなさい。

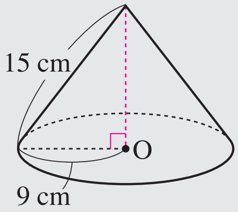
(1)　この円錐の高さを求めなさい。

(2)　この円錐の体積を求めなさい。



ポイント

● 母線と底面の半径が与えられた円錐の高さ
→ 円錐の半径，高さ，母線によって囲まれた直角三角形において，三平方の定理を利用して求める



解答

(1)　円錐の半径，高さ，母線によって囲まれた三角形は直角三角形だから，高さを h cm とすると

$$9^2 + h^2 = 15^2$$
$$h^2 = 225 - 81$$
$$h^2 = 144$$

$h > 0$ なので

$$h = 12$$

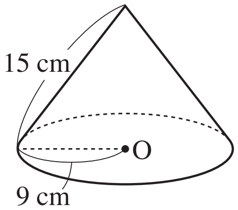
よって

12 cm　…(答)

(2)　(1)より，円錐の高さは 12 cm なので，求める体積は

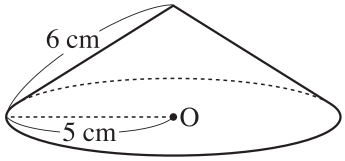
$$\frac{1}{3} \times \pi \times 9^2 \times 12 = \mathbf{324\pi}\ (\mathrm{cm}^3)$$　…(答)

MEMO



確認テスト 2

右の図のように，底面の半径が 5 cm，母線が 6 cm の円錐がある。このとき，次の問いに答えなさい。
(1)　この円錐の高さを求めなさい。
(2)　この円錐の体積を求めなさい。



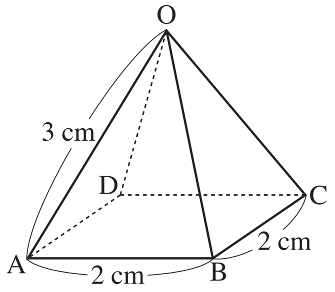
例題 3　角錐の体積

問題

　右の図のような正四角錐 O–ABCD について，次の問いに答えなさい。

⑴　この正四角錐の高さを求めなさい。

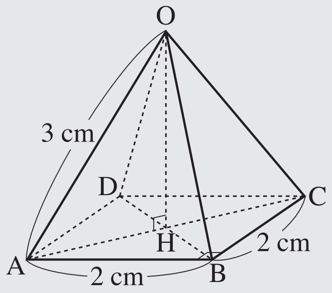
⑵　この正四角錐の体積を求めなさい。



ポイント

● 各辺の長さが与えられた正四角錐の高さ

→ 正四角錐の高さを OH とすると，点 H は底面の正方形の対角線の交点である。∠OHA = 90° だから，直角三角形 OHA に注目して，三平方の定理を利用して求める



解答

⑴　点 A と C を結ぶ。△ABC は ∠ABC = 90° の直角二等辺三角形だから

$$AC : AB = \sqrt{2} : 1$$
$$AC : 2 = \sqrt{2} : 1$$
$$AC = 2\sqrt{2}\ (\text{cm})$$

よって

$$AH = \frac{1}{2}AC$$
$$= \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2}$$
$$= \sqrt{2}\ (\text{cm})$$

したがって，直角三角形 OAH に着目すると

$$OH^2 + (\sqrt{2})^2 = 3^2$$
$$OH^2 = 9 - 2$$
$$OH^2 = 7$$

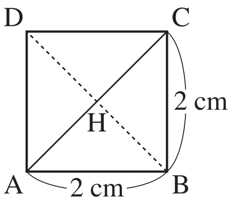
OH > 0 だから

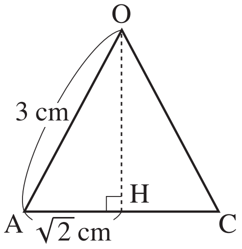
$$OH = \boldsymbol{\sqrt{7}\ \text{cm}}$$ …(答)

⑵　⑴より，正四角錐の高さは $\sqrt{7}$ cm なので，求める体積は

$$\frac{1}{3} \times 2 \times 2 \times \sqrt{7} = \boldsymbol{\frac{4\sqrt{7}}{3}\ (\text{cm}^3)}$$ …(答)

MEMO



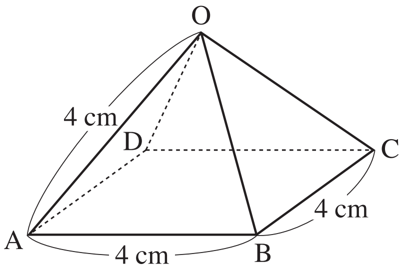


確認テスト 3

右の図のような正四角錐 O–ABCD について，次の問いに答えなさい。

⑴　この正四角錐の高さを求めなさい。

⑵　この正四角錐の体積を求めなさい。



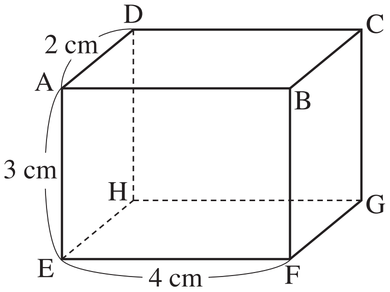
例題 4　直方体とひもの長さ

問題

右の図の直方体において，直方体の表面を通って，頂点 A から頂点 G まで，ひもをゆるまないようにかける。このとき，次のそれぞれの場合について，ひもの長さを求めなさい。

(1)　ひもが辺 BC を通るようにかけるとき

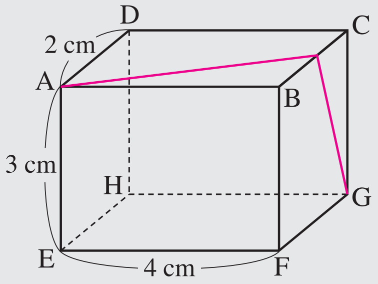
(2)　ひもが辺 EF を通るようにかけるとき



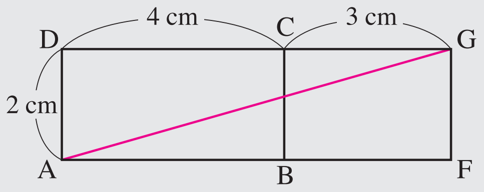
ポイント

● ひもをゆるまないようにかける

→ ひもの長さは最小になるので，展開図をかいてその長さを求める。

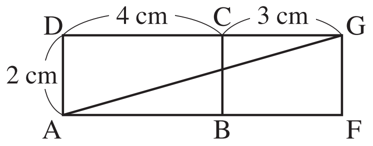


→



解答

(1)



求めるひもの長さは，上の展開図の長方形 AFGD の対角線 AG の長さだから

$AG^2 = 2^2 + (4 + 3)^2$

$= 4 + 49$

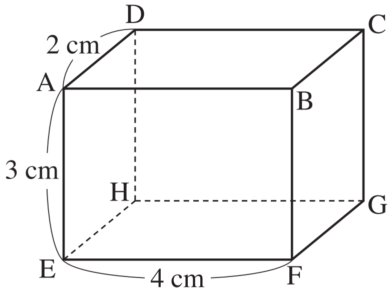
$= 53$

AG > 0 なので

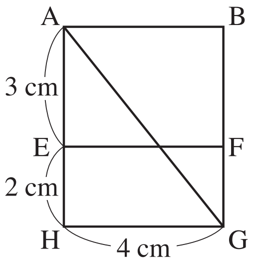
$AG = \sqrt{53}$ **cm**　･･･**(答)**

MEMO

(1)



(2)



求めるひもの長さは，上の展開図の長方形 AHGB の対角線 AG の長さだから

$AG^2 = (3 + 2)^2 + 4^2$

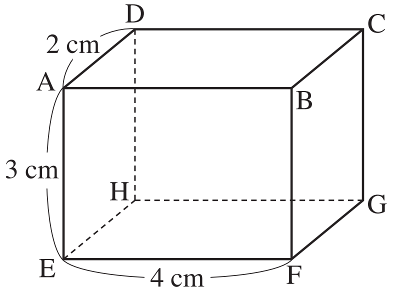
$= 25 + 16$

$= 41$

AG > 0 なので

AG = **$\sqrt{41}$ cm**　…(答)

(2)



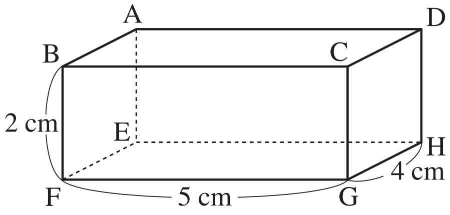
確認テスト 4

右の図の直方体において，直方体の表面を通って，頂点 A から頂点 G まで，ひもをゆるまないようにかける。このとき，次のそれぞれの場合について，ひもの長さを求めなさい。

(1) ひもが辺 BC を通るようにかけるとき

(2) ひもが辺 BF を通るようにかけるとき

(3) ひもが辺 EF を通るようにかけるとき



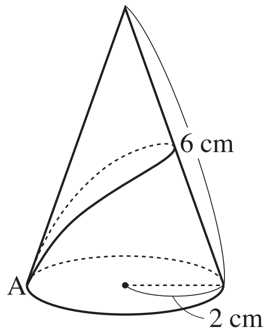
例題 5 円錐とひもの長さ

問題

右の図のように，底面の半径 2 cm，母線の長さ 6 cm の円錐があり，底面の周上にある点 A から，円錐の側面を 1 周してもとの点 A まで，ひもをゆるまないようにかける。このとき，次の問いに答えなさい。

(1)　円錐の展開図で，側面のおうぎ形の中心角を求めなさい。

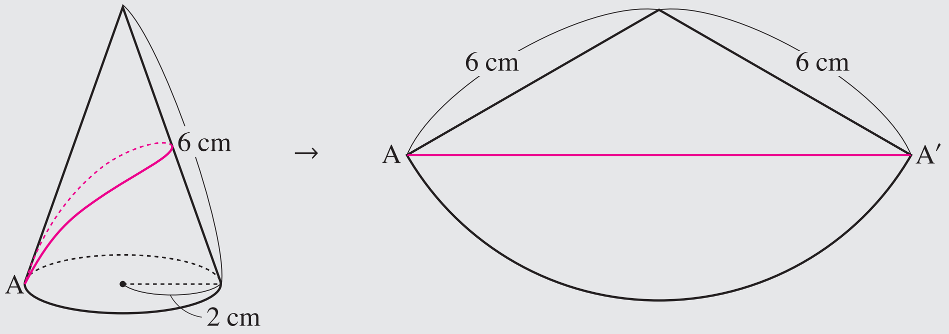
(2)　ひもの長さがもっとも短くなるとき，その長さを求めなさい。



ポイント

● ひもをゆるまないようにかける

→ ひもの長さは最小になるので，展開図をかいてその長さを求める。



解答

(1)　展開図のおうぎ形の弧の長さは，底面の円の円周と等しいから，おうぎ形の中心角を $x°$ とすると

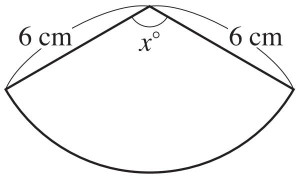
$$2\pi \times 6 \times \frac{x}{360} = 2\pi \times 2$$

$$x = 120$$

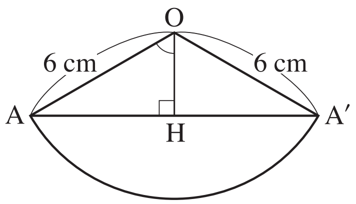
よって

120°　…(答)

MEMO



(2)



求めるひもの長さは，上の図の線分 AA′ の長さである。おうぎ形の中心を O とし，点 O から AA′ にひいた垂線と AA′ との交点を H とすると，側面の中心角が 120° なので

$\angle AOH = 60°$

よって，直角三角形 OAH に着目すると

$AH : OA = \sqrt{3} : 2$

$AH : 6 = \sqrt{3} : 2$

$2AH = 6\sqrt{3}$

$AH = 3\sqrt{3}$（cm）

したがって，ひもの長さは

$2AH = 2 \times 3\sqrt{3}$

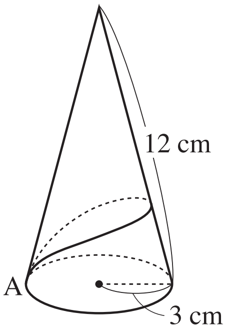
$= \mathbf{6\sqrt{3}}$ **（cm）** …(答)

確認テスト 5

右の図のように，底面の半径 3 cm，母線の長さ 12 cm の円錐があり，底面の周上にある点 A から，円錐の側面を 1 周してもとの点 A まで，ひもをゆるまないようにかける。このとき，次の問いに答えなさい。

(1) 円錐の展開図で，側面のおうぎ形の中心角を求めなさい。

(2) ひもの長さがもっとも短くなるとき，その長さを求めなさい。



第 42 講・標本調査

例題 1　標本調査と全数調査

ポイント

- 全数調査（ぜんすう）：調査の対象となる集団全部について調査すること
- 標本調査（ひょうほん）：集団の一部分を調べ，もとの集団全体の傾向を推測する調査のこと

問題

次の調査は，全数調査，標本調査のどちらか答えなさい。

(1)　高校の入学試験
(2)　缶づめの品質調査
(3)　電球の耐久調査
(4)　国勢調査

解答

(1)　全員に対して試験を実施しなければ合格かどうかを判定できないので

全数調査　…(答)

(2)　全数調査を行うと，販売する缶づめがなくなってしまうので

標本調査　…(答)

(3)　全数調査を行うと，販売する電球がなくなってしまうので

標本調査　…(答)

(4)　国勢調査は日本に住んでいるすべての人に対して行われる調査なので

全数調査　…(答)

MEMO

確認テスト 1

次の調査は，全数調査，標本調査のどちらか答えなさい。
(1)　自転車のタイヤの耐久時間の調査
(2)　学校の歯科検診
(3)　テレビの視聴率調査
(4)　選挙の当選予想のための出口調査

例題 2　標本調査の方法

ポイント

- 母集団（ぼしゅうだん）：標本調査を行うときに傾向を知りたい集団全体のこと
- 標本　：標本調査を行うときに母集団の一部分として取り出したもの。
  このときに取り出したデータの個数を標本の大きさという
- 調査の対象となっている集団の全体から，かたよりのないように標本を取り出すことを無作為（むさくい）に抽出（ちゅうしゅつ）するという。標本調査を通して母集団の傾向を知るためには，母集団から標本を無作為に抽出することが重要である

（例）数を無作為に抽出する方法
　→ 乱数さい，乱数表，コンピュータを使う方法などがある

問題

次のア～エの標本調査について，標本の選び方が適切なものを**すべて**選びなさい。
ア　日本人はどんなフルーツが好きかを調べるために，公園で集まっていた中学生に回答してもらう。
イ　ある中学校で，1 日の勉強時間を調べるのに，生徒 50 人を無作為に抽出して回答してもらう。
ウ　日本の野球チームの中で，どのチームが人気が高いかを調べるのに，ある球場に見に来てくれた人から無作為に抽出して回答してもらう。
エ　ある小学校の児童の虫歯の本数を調べるのに，くじ引きで全校児童の中から 100 人を選ぶ。

解答

アは，日本人全体の傾向を知りたいのに，標本が公園にいる中学生にかたよっているため，適切ではない。

イは，中学校の生徒全員から標本となる生徒を無作為に抽出するので適切である。

ウは，標本がある球場に見に来てくれた人にかたよっているため，適切ではない。

エは，ある小学校の児童全員から標本となる児童をくじ引きによって無作為に抽出するので適切である。

よって

イ，エ　…(答)

MEMO

確認テスト 2

次のア～エの標本調査について，標本の選び方が適切なものを選びなさい。

ア　ある市で新聞の購読率を調べるために，市役所に近いところにある家を数件選ぶ。

イ　ある中学校で 3 年生の毎日の家庭学習の時間を調査するために，あるクラスの女子全員を選ぶ。

ウ　3000 個の卵の 1 個あたりの平均の重さを調べるために，無作為に 50 個の卵を選ぶ。

エ　内閣の支持率を調べるために，国会議員にアンケートを実施する。

例題 3　標本調査の利用

問題

ある学校で，全校生徒 750 人の中から無作為に全体の 12% にあたる人数の生徒を選んで，趣味についてのアンケートを行った。次の問いに答えなさい。

⑴　標本の大きさを求めなさい。

⑵　アンケートの結果，映画鑑賞と答えた生徒が 21 人いた。全校生徒 750 人の中に，趣味が映画鑑賞である生徒はおよそ何人と推測できるか答えなさい。

ポイント

● 全校生徒のうち，趣味が映画鑑賞である生徒の人数を推測する
→ 趣味が映画鑑賞である生徒の割合は，
母集団（全校生徒）と標本（アンケートを行った生徒）で等しいと考える

解 答

MEMO

(1)　標本はアンケートを行った生徒なので，その人数は

$$750 \times \frac{12}{100} = \mathbf{90}$$ **（人）　…(答)**

(2)　趣味が映画鑑賞である生徒をおよそ x 人とする。
母集団と標本において，趣味が映画鑑賞である生徒の割合が等しいと考えると

$$x : 21 = 750 : 90$$
$$90x = 21 \times 750$$
$$x = 175$$

よって

およそ 175 人　…(答)

確認テスト 3

袋の中に白いご石がたくさん入っている。この白いご石の数を知るために，同じ大きさの黒いご石を 60 個入れてよくかき混ぜ，ひとつかみ取り出したところ，ご石は 27 個で，その中に黒いご石は 4 個あった。この袋の中におよそ何個の白いご石が入っていると推測できるか答えなさい。

[メモ]

[メモ]

[メモ]

©RECRUIT
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。